

大学物理II笔记

1. 气体动理论

1. 状态方程

理想气体状态方程：

$$\textcircled{1} PV = \frac{m}{M} RT \quad \text{普适气体常量： } R = 8.31 J / (\text{mol} \cdot K)$$

$$\textcircled{2} P = nkT \quad \text{单位体积分子数： } n = \frac{N}{V} \quad \text{玻尔兹曼常数： } k = 1.38 \times 10^{-23} J / K$$

2. 内能

气体分子

$$\text{平动动能： } \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$$

$$\text{内能： } \bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT$$

气体

$$\text{平动动能： } E = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT$$

$$\text{内能： } E = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT$$

自由度

$$\text{单原子 } i = 3$$

$$\text{双原子 } i = 5$$

$$\text{多原子 } i = 6$$

3. 速度分布函数

$$\text{归一性： } \int_0^{+\infty} f(v) dv = 1$$

常见函数表示的意义：

$$\textcircled{1} \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \quad \text{表示 } v_1 \sim v_2 \text{ 间分子数占总分子数百分比}$$

$$\textcircled{2} f(v) dv \quad \text{表示 } v \sim v + dv \text{ 间分子数占总分子数百分比}$$

$$\textcircled{3} \int_{v_1}^{v_2} Nf(v) dv \quad \text{表示 } v_1 \sim v_2 \text{ 间分子数}$$

$$\textcircled{4} f(v) \quad \text{表示速率 } v \text{ 在附近单位速率间隔内的分子数占总分子数的百分比}$$

三种常见速率

平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ 方均根速率 $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 最概然速率 $v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

4. 平均自由程

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

2. 热力学

1. 热力学第一定律

热力学第一定律: $Q = E_2 - E_1 + A$

① 内能增量: $\Delta E = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$

② 对外做功: $A = P(V_2 - V_1) = \int_{V_1}^{V_2} P dV$

③ $Q > 0$ 系统吸热 $Q < 0$ 系统放热

$\Delta E > 0$ 内能增加 $\Delta E < 0$ 内能减少

$A > 0$ 系统对外做正功 $A < 0$ 系统对外做负功

摩尔热容: dQ/dT

ν 摩尔刚性理想气体的内能 $U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} pV$

准静态在一个过程中, 任意时刻的中间态都无限接近于一, 任意时刻的中间态都无限接近于一个平衡态, 则此过程为准静态过程。即准静态过程。即准静态过程是由一系列平衡态组成的过程

当气体作准静态压缩或膨胀时，外界的压强 p_e 必等于此时气体的压强 p 。

当活塞移动微小位移 dL 时气体对外界做功为：

$$\delta A = p \cdot S \cdot dL = p \cdot dV$$

在无摩擦准静态过程中：

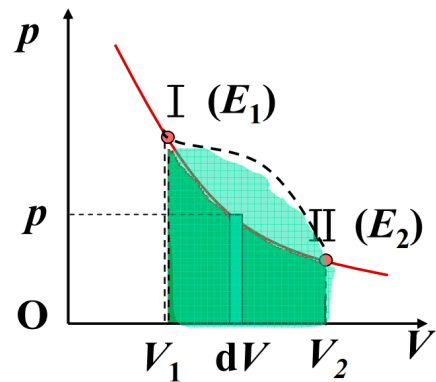
系统体积由 V_1 变为 V_2 ，系统对外界作总功为：

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$\delta A = p dV$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

功的大小等于 $p-V$ 图上过程曲线 $p=p(V)$ 下的面积。



2.热容

热容定义

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

dT : 温度变化

δQ : 热量变化

热容：系统温度升高（或降低）1K所吸收（或放出）的热量。

☺ **比热容**：单位质量物质的热容

☺ **摩尔热容**：1mol物质的热容

$$C_m = \frac{C}{\nu}$$

热量

$$\begin{cases} \delta Q = \nu C_m dT \\ Q = \nu C_m \Delta T \end{cases}$$

$$\gamma = C_{pm} / C_{vm}$$

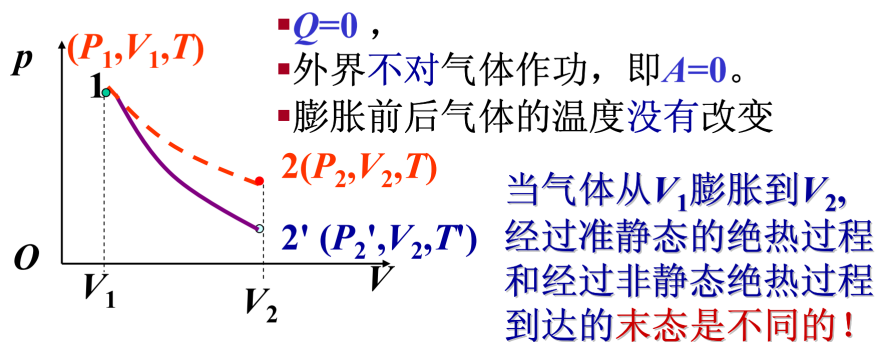
$$C_{vm} = iR/2$$

$$C_{pm} = C_{vm} + R = (i+2)R/2$$

3.三个等过程和绝热过程

过程	特征	过程方程	吸收热量	对外做功	内能增量
等体	$V = \text{常量}$	$\frac{P}{T} = \text{常量}$	$\frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$	0	$\frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$
等压	$P = \text{常量}$	$\frac{V}{T} = \text{常量}$	$\frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$	$P(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$	$\frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$
等温	$T = \text{常量}$	$T = \text{常量}$	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} RT \ln \frac{P_1}{P_2}$	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} RT \ln \frac{P_1}{P_2}$	0
绝热	$Q = 0$	$PV^\gamma = \text{常量}$ $V^{\gamma-1}T = \text{常量}$ $\frac{P^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{常量}$	0	$A = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1}$	$\frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$

绝热自由膨胀 为非平衡过程,无任何过程方程



4.制冷机

制冷系数

$$w = \frac{Q_{\text{吸}}}{|A|} = \frac{Q_{\text{吸}}}{|Q_{\text{放}}| - Q_{\text{吸}}}$$

制冷系数越大,制冷效果越好。
 制冷系数可以大于1。

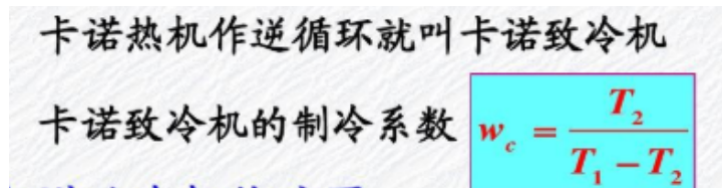
5.热机效率

热机效率：

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

净功： $A = Q_1 - Q_2$

卡诺制冷机



$$w_c = Q_2/A$$

6.热力学第二定律

一些自然过程的方向：

过程的**唯一效果** 能否发生

热功 转换	功全部转变成热	√
	热全部转变成功	×
热 传导	热量从高温传向低温	√
	热量从低温传向高温	×
气体 扩散	从分离到混合	√
	从混合到分离	×

可逆过程是理想过程，它必须同时具备如下条件

- 1) 不存在耗散力（如摩擦力，粘滞力）做功
- 2) 不存在温差引起的热传导
- 3) 必须是准静态过程。

7. 卡诺定理

卡诺定理 (含两条内容):

(1) 在温度分别为 T_1 、 T_2 的两个给定热源之间工作的一切可逆热机效率相同, 与工作物质无关。

(2) 在相同的高温、低温两个热源之间工作的一切不可逆热机, 其效率不可能大于可逆热机的效率。

卡诺循环

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

8. 克劳修斯熵

$$\oint_R \frac{\delta Q}{T} = 0$$

— 克劳修斯等式

克劳修斯熵

$$S - S_0 = \int_{0 \rightarrow S} \frac{\delta Q}{T}$$

单位: J/K

积分沿可逆过程的任意路径

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{可逆}}}{T}$$



对不可逆循环有:

$$\oint_{\text{不可逆}} \frac{\delta Q}{T} < 0$$

对绝热过程 $\delta Q \equiv 0$, 所以:

$$\Delta S_{\text{绝热}} \geq 0 \quad (\text{R取“=”}) \quad \text{— 熵增加原理}$$

“热力学系统经绝热过程熵不会减少, 可逆绝热过程熵不变, 不可逆绝热过程熵增加”

孤立系统进行的过程必然是绝热的, 所以

$$\Delta S_{\text{孤立系}} \geq 0 \quad (\text{R取“=”})$$

“孤立系统内的一切过程熵不会减少”

9. 熵的计算

1) 以 (T, V) 为独立变量:

$$pV = \nu RT$$

$$S - S_0 = \nu C_{V,m} \ln \frac{T}{T_0} + \nu R \ln \frac{V}{V_0}$$

2) 以 (T, p) 为独立变量:

$$S - S_0 = \nu C_{P,m} \ln \frac{T}{T_0} - \nu R \ln \frac{p}{p_0}$$

3) 以 (p, V) 为独立变量:

$$S - S_0 = \nu C_{P,m} \ln \frac{V}{V_0} + \nu C_{V,m} \ln \frac{p}{p_0}$$

1. 当系统由初态 A 通过一可逆过程 R 到达终态 B 时

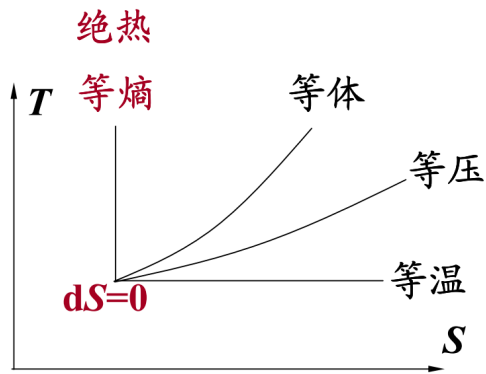
求熵变 (熵增量) 的方法: 直接用 $S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_R$

2. 当系统由初态 A 通过一不可逆过程到达终态 B 时

求熵变的方法:

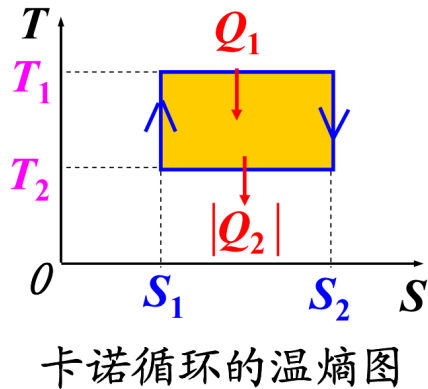
可设计一个连接同样初终两态的任意一个

可逆过程 R , 再利用 $S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_R$



$$Q = \int T dS$$

对卡诺循环:



卡诺循环的温熵图

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$$

$$|Q_2| = T_2(S_2 - S_1)$$

$$\eta_c = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

与工作物质无关

3. 振动

1. 简谐运动

1. 简谐振动方程

简谐振动定义

物理量随时间按正弦或余弦变化的过程:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{— 简谐振动}$$

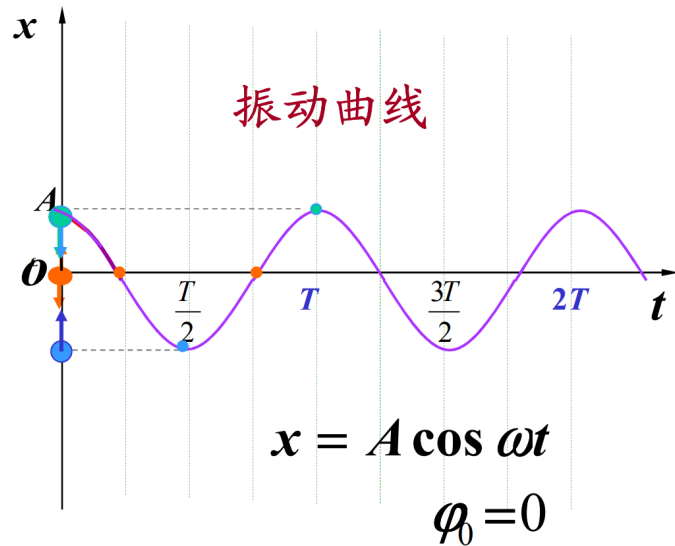
动力学方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

这一微分方程的解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

称为质点的
运动学方程(振动方程)。



简谐振动定义：三判据

- 1、物体只在线性回复力作用下产生的运动称为简谐振动。
- 2、满足 $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 动力学方程的运动为简谐振动。
- 3、在无外来强迫力作用下，质点(或其他物理量)离开平衡位置的位移是时间的正弦函数或余弦函数的直线运动是简谐振动。

判断一振动是否是简谐振动 用三种
定义中任何一种皆可。

2. 简谐运动的特征量

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega}$$

(1) 振幅 $A (A > 0)$

简谐振动的物体离开平衡位置的最大位移的绝对值叫做振幅。

振幅A与初始条件有关!

(2) 周期 T , 频率 ν , 角频率 ω

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos[\omega(t + T) + \varphi_0] \\ &= A \cos[\omega t + \omega T + \varphi_0]\end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \omega = 2\pi\nu$$

$\omega = 2\pi\nu$ 称为振动的角频率或圆频率。

弹簧振子 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

固有频率 固有周期

ω 唯一取决于系统!

(3) 相位和初相

由 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$
和 $v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$

“相”是“相貌”的意思，相位决定了谐振动的“相貌”。

当 A 和 ω 为一定时 振动物体在任一时刻的运动状态 (指位置和速度) 完全(唯一地)由 $(\omega t + \varphi_0)$ 决定

$(\omega t + \varphi_0) = \Phi$ 称为振动的相位

φ_0 是 $t=0$ 时的相位, 称为初相位

φ_0 由初始条件确定 $\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega}$

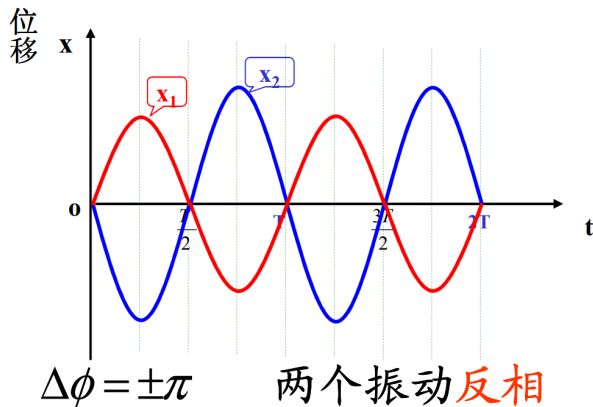
(4)相位差

难点

$$\Delta\phi = (\omega_2 t + \phi_{20}) - (\omega_1 t + \phi_{10})$$

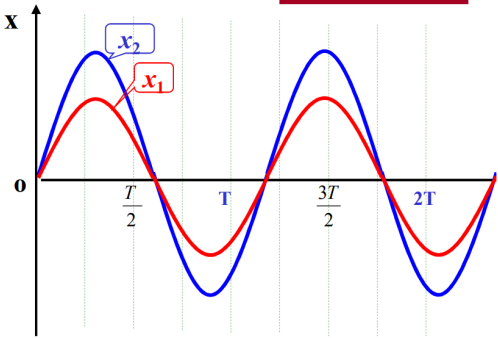
两个同频率的简谐振动相位差

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= (\omega t + \phi_{20}) - (\omega t + \phi_{10}) \\ &= \phi_{20} - \phi_{10} \quad \text{初相位的差!} \end{aligned}$$



$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{20})$$



$$\Delta\phi = 0$$

两振动的物体同时达到位移的最大值和最小值，振动的步调完全相同

两个振动同相

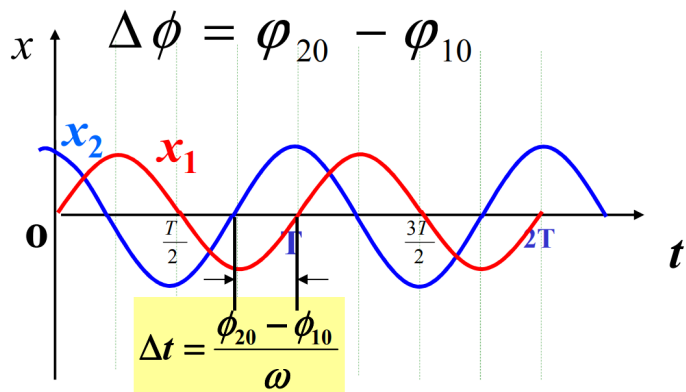
当 $\Delta\phi > 0$ 时

称振动2超前振动1 $\Delta\phi$

或者说振动1落后2 $\Delta\phi$

将 x_1 曲线左移 距离为

$$\Delta t = \frac{|\Delta\phi|}{\omega} \quad \text{即得 } x_2 \text{ 的曲线。}$$



若 $\Delta\phi < 0$ 时

说明振动2比振动1落后，将 x_1 曲线右移

$$\text{距离为 } \Delta t = \frac{|\Delta\phi|}{\omega} \quad \text{即得 } x_2 \text{ 的曲线。}$$

简谐振动的速度和加速度

$$\because x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$v_m = \omega A$ 称为速度幅值

位移与速度的比较

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

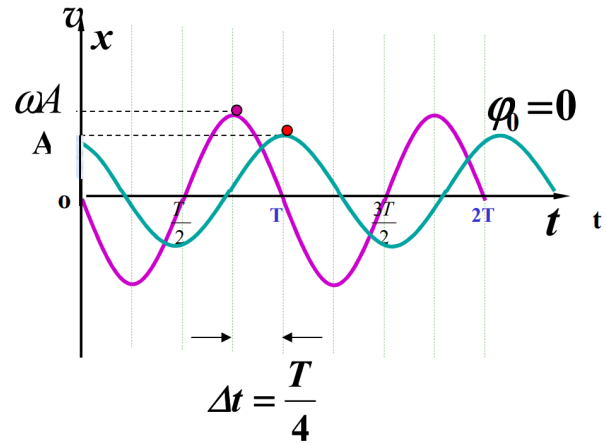
$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

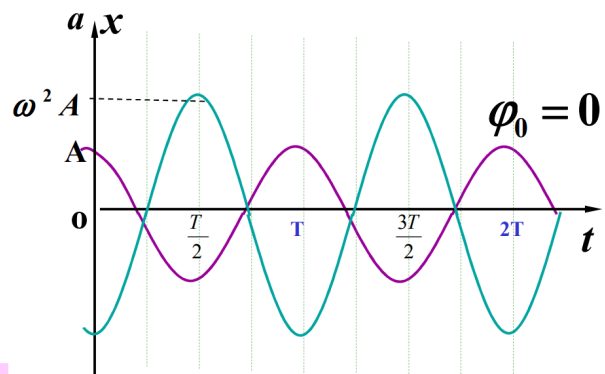
$$= -a_m \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

$a_m = \omega^2 A$ 加速度幅值

加速度总是和位移 x 反相



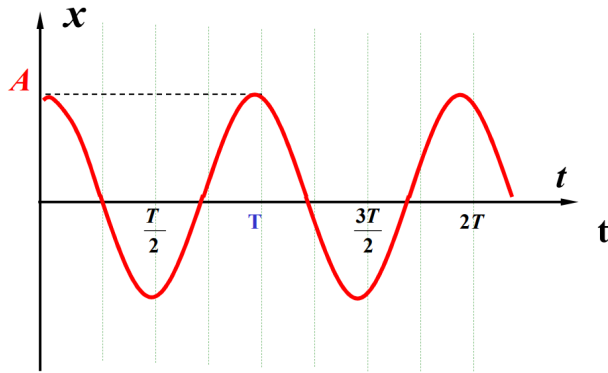
速度总是比位移超前四分之一周期。



3. 简谐振动的表示方法

一 解析法或振动曲线表示法

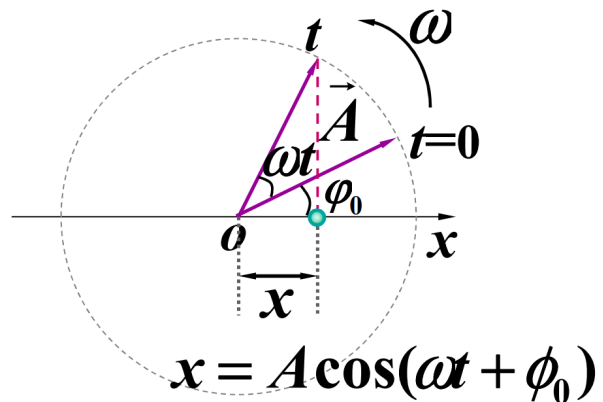
$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



二 旋转矢量表示法 (重点)

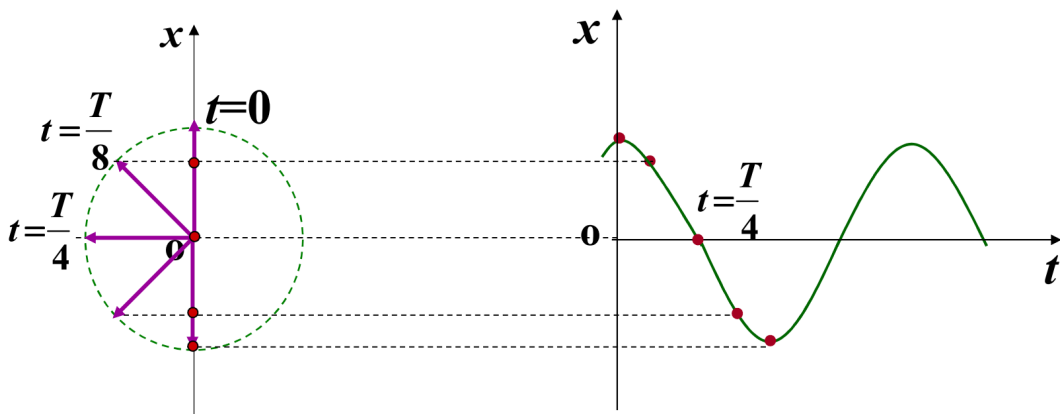
$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

作匀速转动矢量 \vec{A} ，
其端点在x轴上的投影点的
运动是简谐振动。



两种表示法的对照

$$x = A \cos \omega t, \text{ (设 } \varphi_0 = 0 \text{)}$$



4. 简谐振动的能量

仍以弹簧振子为例 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

振动物体的动能 $E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$

振动物体的势能 $E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$

考虑到 $\frac{k}{m} = \omega^2$ 则总能量 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2$

系统的总能量守恒 对于任何简谐系统都成立

注意到 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = C$

$$\frac{d}{dt} : \frac{1}{2} m 2v \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} k 2x \frac{dx}{dt} = 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

动能对时间的平均值:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) dt = \frac{k A^2}{2T\omega} \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \sin^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} k A^2$$

势能对时间的平均值:

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) dt = \frac{k A^2}{2T\omega} \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} k A^2$$

结论: 1. 即弹簧振子的动能和势能的平均值相等, 且等于总机械能的一半.

2. 任一简谐振动总能量与振幅的平方成正比.

3. 振幅不仅给出简谐振动运动的范围, 而且还反映了振动系统总能量的大小及振动的强度.

这些结论适用于任何简谐振动.

2. 简谐振动的合成与分解

1. 同方向同频率谐运动的合成

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

$$x = x_1 + x_2$$

两个振动相位差:

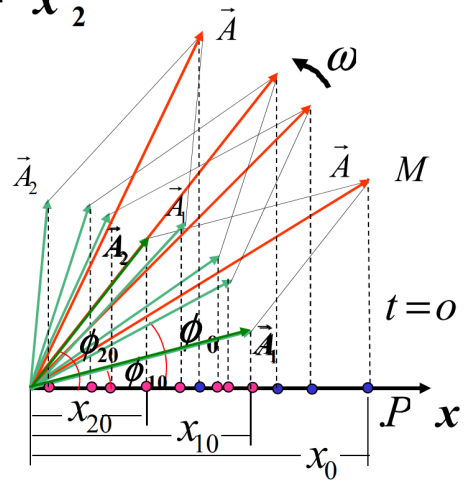
$$\Delta\phi = (\omega t + \phi_{20}) - (\omega t + \phi_{10}) = \phi_{20} - \phi_{10}$$

合成振动仍为简谐振动

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$$

$$\tan \phi_0 = \frac{A_1 \sin \phi_{10} + A_2 \sin \phi_{20}}{A_1 \cos \phi_{10} + A_2 \cos \phi_{20}}$$



讨论两个特例

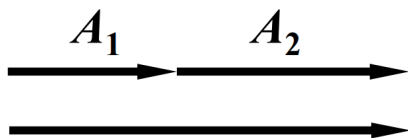
(1) 两个振动同相

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

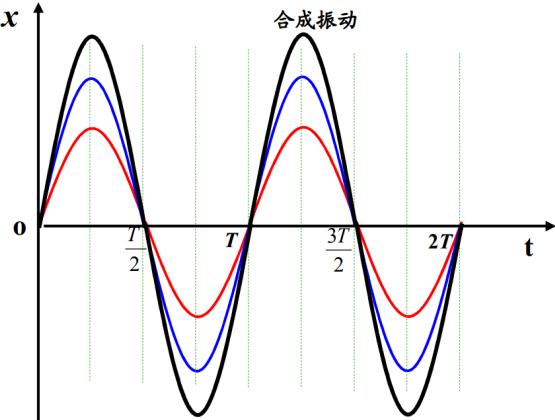
$$\text{由 } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \quad x$$

$$= A_1 + A_2$$



$$A_1 + A_2$$

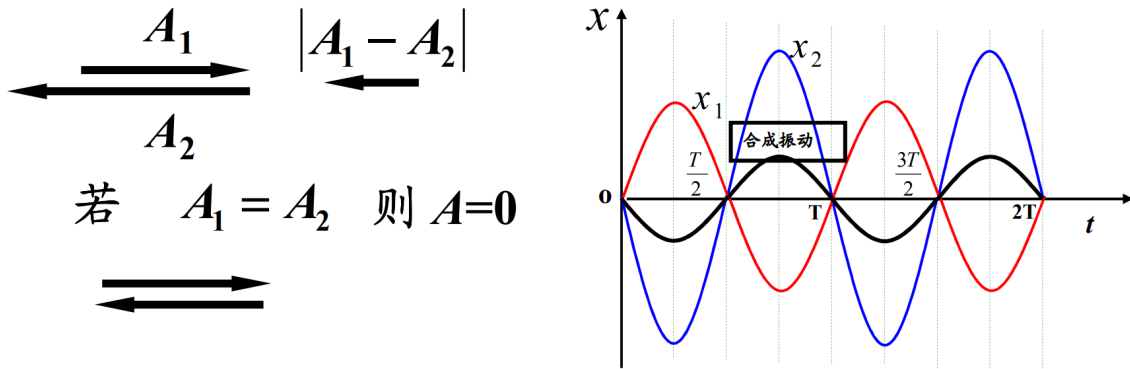


(2) 两个振动反相

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = (2k + 1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

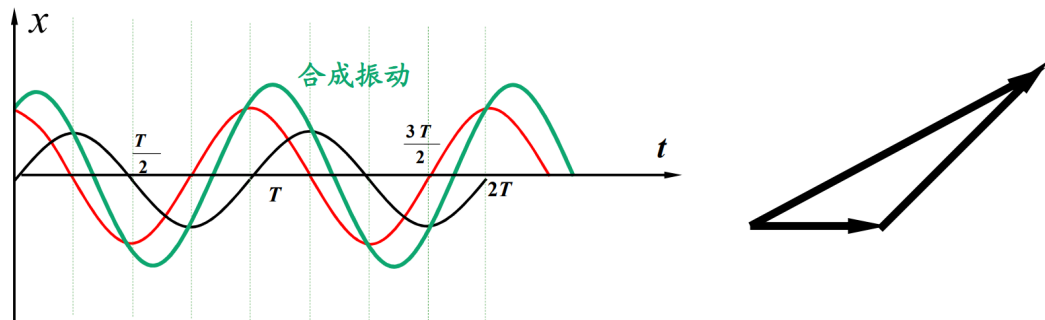
$$\text{由 } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$$



一般情况 $\Delta\varphi$ 为其他任意值, 则:

$$|A_1 - A_2| < A < (A_1 + A_2)$$

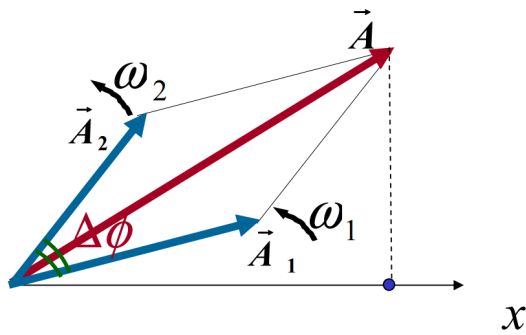


上述结果说明两个振动的相位差对合振动起着重要作用。

2. 同方向不同频率简谐振动的合成

同方向同频率两个简谐振动的合成 -----仍为简谐振动

采用旋转矢量表示法



若 $\omega_1 = \omega_2$, 则 $\Delta\phi$ 不变;

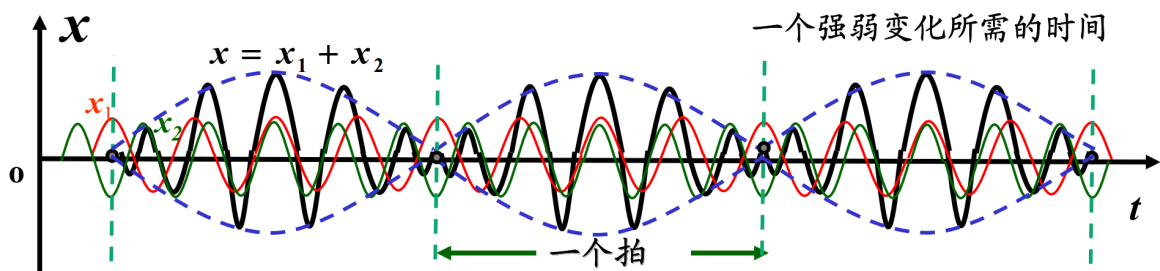
若 $\omega_1 \neq \omega_2$, 则 $\Delta\phi$ 变;

同方向不同频率两个简谐振动的合成

-----为一复杂运动

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

$\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right| (\tau) = \pi$



合振幅变化的频率即拍频

$$\nu_{\text{拍}} = \frac{1}{\tau} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1|$$

3.垂直方向上谐振动 垂直方向上谐振动的合成

一、两个互相垂直同频率简谐振动的合成

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

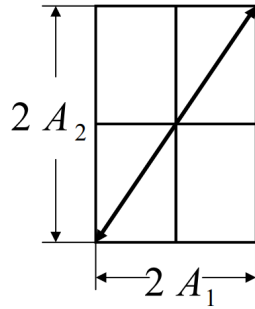
消去 t 得到轨道方程 (椭圆方程)

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \sin^2(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

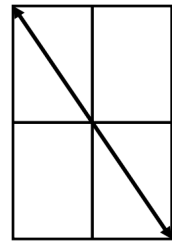
(1) $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} = 0$

$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \pi$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}$$



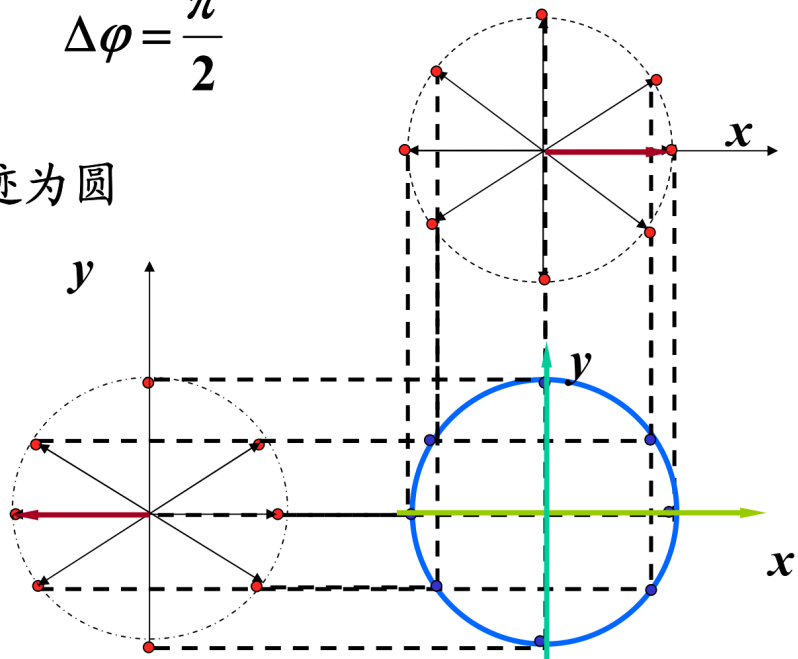
$$\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2}$$



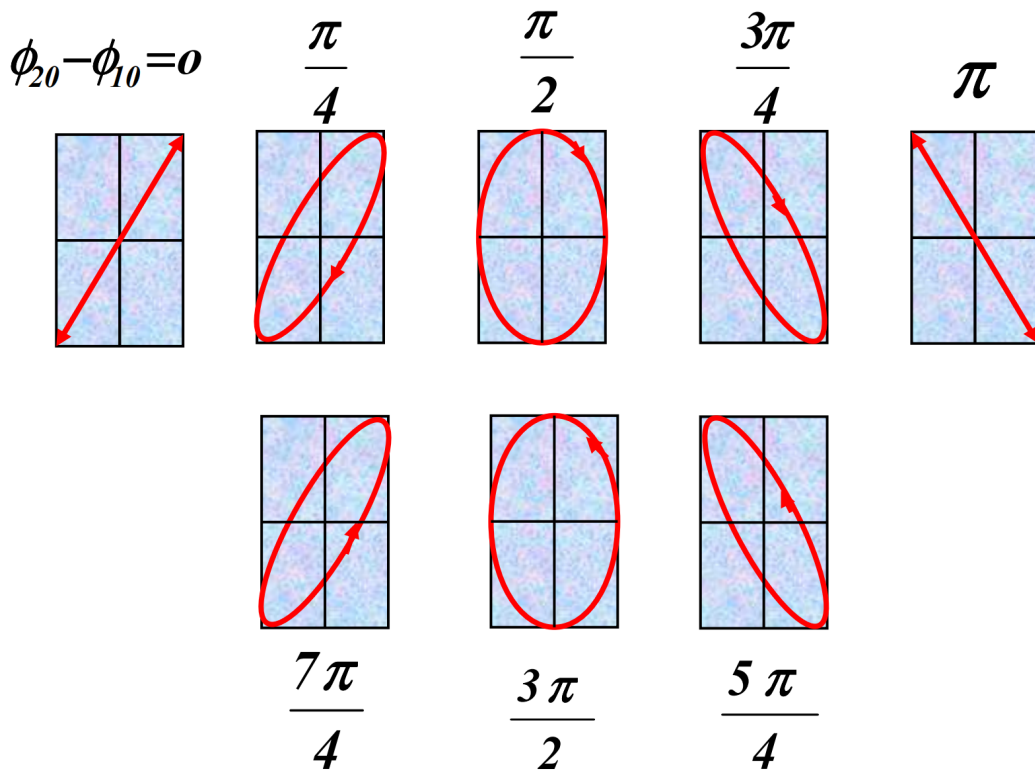
(2) $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$A_1 = A_2$ 轨迹为圆



$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10}$ 为一些典型值时的轨迹



二、两个互相垂直不同频率简谐振动的合成

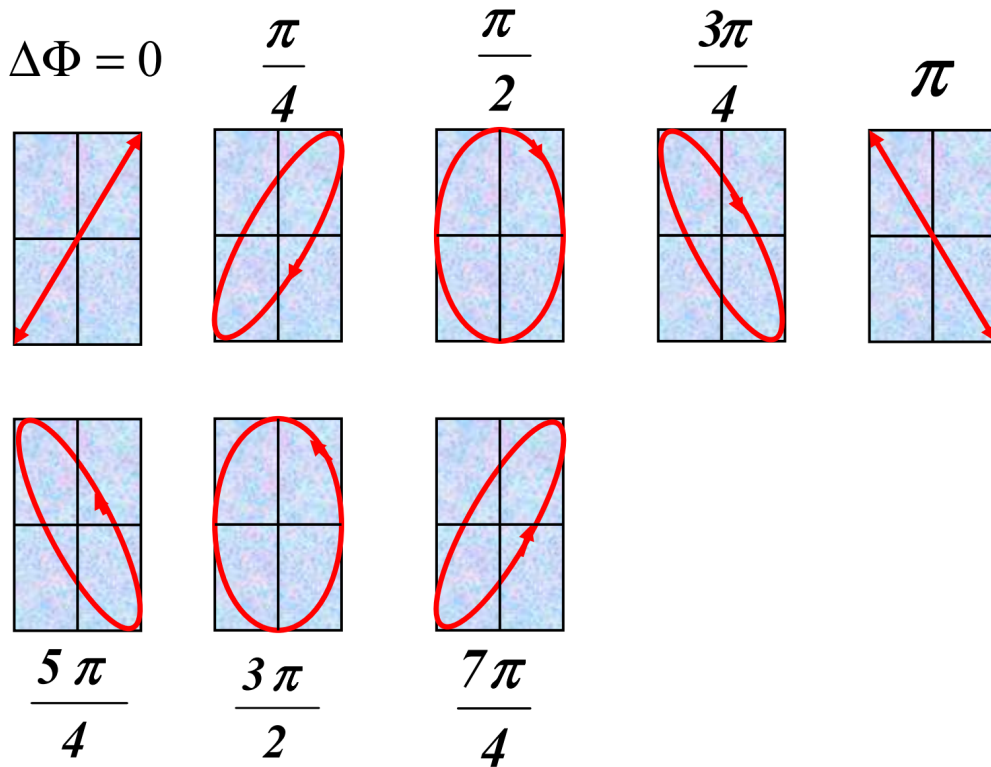
当两个振动的频率差异很小时

相位差 $\Delta\phi = (\omega_2 t + \phi_{20}) - (\omega_1 t + \phi_{10})$ 随 t 缓慢变化

$$= (\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_{20} - \phi_{10})$$

合运动轨迹将按同频率垂直振动合成曲线的形状依次缓慢变化。

$\Delta\phi$ 等于如下典型值时依次变化的图形



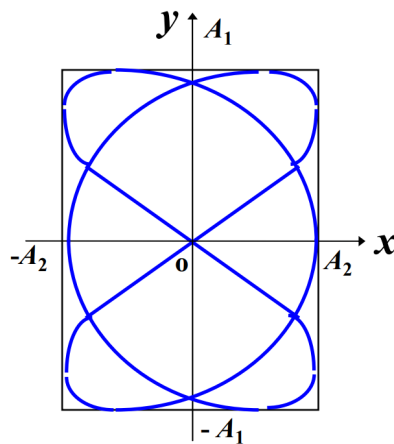
二、两个互相垂直不同频率简谐振动的合成

当两个振动的频率差异很大但有简单的整数比
 轨迹为稳定的闭合曲线，称李萨如图形。

曲线的具体形状和两频率的比值及 ϕ_1 和 ϕ_2 的大小有关。

例：下图是 $\omega_x : \omega_y = 3:2$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/2$

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{V_y}{V_x}$$



3. 阻尼振动 受迫振动 共振

14-3-1 阻尼振动

阻尼振动(摩擦阻尼, 辐射阻尼)

对于摩擦阻尼, 当 v 不太大时 $F_t = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$

(γ 称为阻尼系数)

由牛顿第二定律 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$

令 $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ $\frac{\gamma}{m} = 2\beta$ (β 称为阻尼因子)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

几种阻尼振动模式 (方程的解及其物理意义)

(1) 小阻尼 ($\beta^2 < \omega_0^2$)

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi)$$

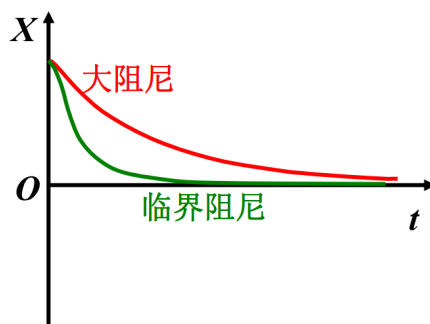
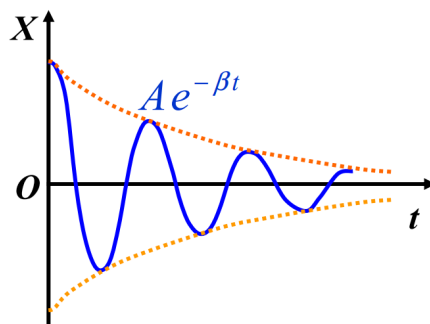
(2) 临界阻尼 ($\beta^2 = \omega_0^2$)

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t}$$

常用于灵敏仪器的回零装置。

(3) 大阻尼 ($\beta^2 > \omega_0^2$)

$$x = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$



与大阻尼相比, 临界阻尼一般将更快回到平衡位置。

14-3-2 受迫振动

驱动力 $F = F_0 \cos \omega t$ 回复力, 摩擦力(阻尼力) 和驱动力

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \beta = \frac{\gamma}{2m} \quad h = \frac{F_0}{m}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \cos \omega t$$

稳态振动后, 方程的解为 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$A = \frac{h}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

以驱动力的角频率 ω 振动

$$\varphi_0 = -\tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \omega_0 > \omega ; \quad \varphi_0 = -\left(\pi - \tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad \omega_0 < \omega$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \frac{h}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tan \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

注意: 此解与简谐振动相似, 但不是一回事:

系统振动频率 = 驱动力频率 $\omega \neq$ 固有频率 ω_0

A 和 φ_0 是 $h, \omega, \omega_0, \beta$ 的函数, 与初始状态 (x_0, v_0) 无关

共振 振幅达到极值

共振时驱动力的频率

$$\omega = \omega_{\text{共振}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

若 $\omega_0 \gg \beta$ 时 $\omega_{\text{共振}} = \omega_0$

共振时:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

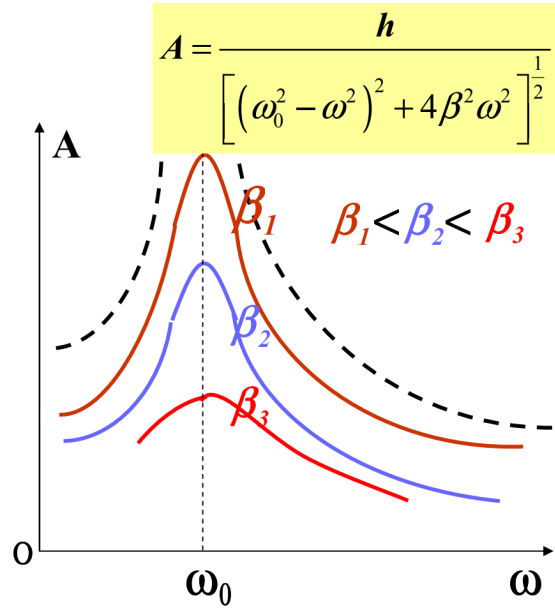
$$x = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = A\omega \cos \omega t \quad F = F_0 \cos \omega t$$

共振时振动速度与驱动力同相!

演示实验

驱动力总作正功, 此时向系统输入的能量最大。



4. 机械波

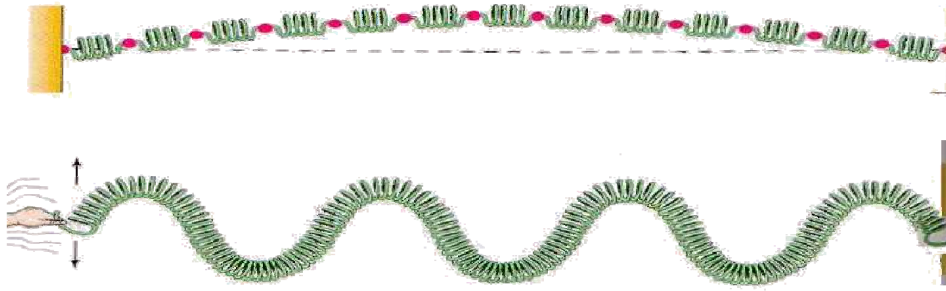
1. 机械波的形成

1. 平面简谐波

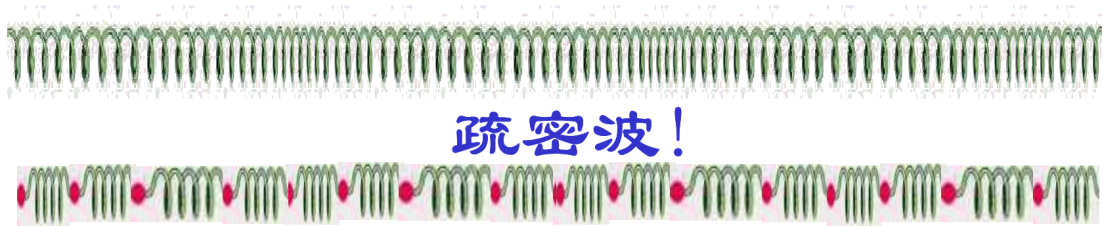
弹性介质的质元受外界扰动而发生振动时, 因质元之间的弹性联系, 会使振动传播开去, 这就形成了波动——**机械波 (mechanical wave)**

机械波形成的条件 $\left\{ \begin{array}{l} \text{波源} \\ \text{弹性介质} \end{array} \right.$

1.横波——振动方向与传播方向垂直，如绳波,电磁波.



2.纵波——振动方向与传播方向相同，如声波.



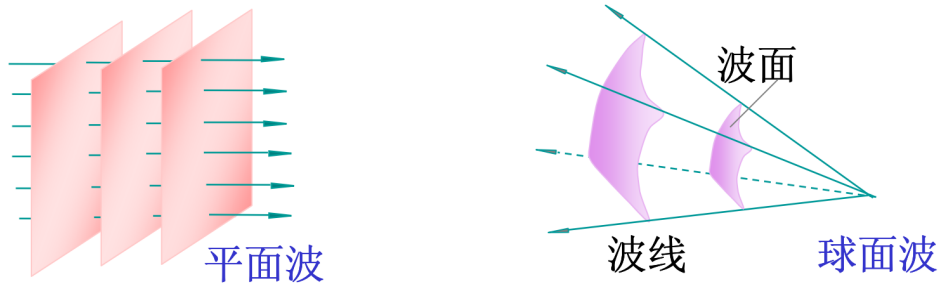
三、波传播的特点

- (1)波源完成一个周期的振动，就有一个完整的波形发送出去。
- (2)沿着波的传播方向向前看去，各质元都要重复波源的振动状态，**振动相位也相继落后于波源的相位。**
- (3)横波使介质产生**切变**，只有能承受切变的物体（**固体**）才能传递横波。
- (4)纵波在介质中引起长变或体变，所有物质都能承受长变和体变（**固、液、气体**）。在固体中纵波、横波均可传递，但**两种波速各不相同。**

2.波的特征量

一、波的几何描述

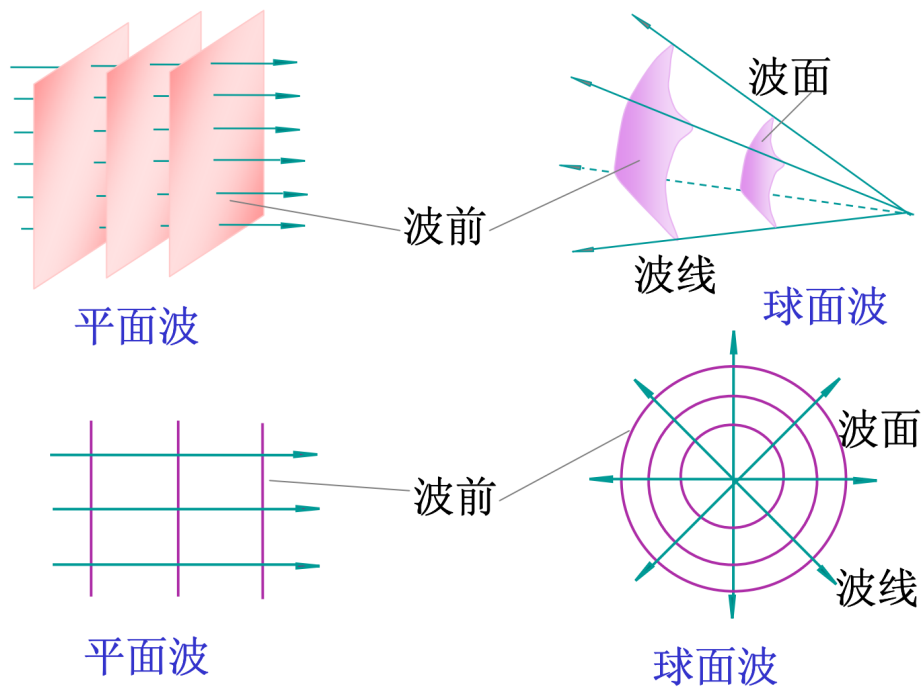
1.波阵面（或相面、波面）—某时刻介质内振动相位相同的点组成的面称为波面。



2.波射线（或波线）—波的传播方向称之为波射线或波线。

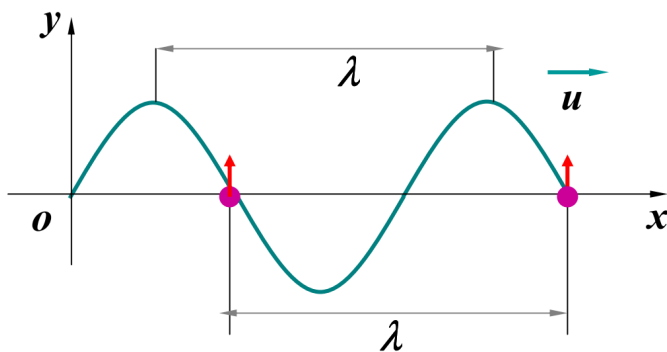
在各向同性均匀介质中，波线与波阵面垂直！

3.波前—某时刻处在最前面的波阵面。



二、波的特征量

1 波长—同一波线上两个相位差为 2π 的振动质点间的距离, 叫做**波长**。或振动在一个周期中传播的距离, 称为波长, 用 λ 表示。



2 波的周期: 波传播一个波长所经历时间, 或一个完整的波通过波线上某一点所需要的时间称为波的周期。

3 频率—单位时间内经过波线上一点的完整波的个数

波的**频率**用 ν 表示. 波的**周期**用 T 表示。

波动的频率, 等于介质中质点的振动频率。

4 波速—单位时间某一确定的振动状态(或振动相位)所传播的距离称为波速. 亦称**相速**。

$$u = \nu\lambda$$

λ —波在**空间**中的周期性

ν —波在**时间**上的周期性

} 通过波速 \vec{u} 联系起来。

3.平面简谐波的表达式

常用的三个波动方程：

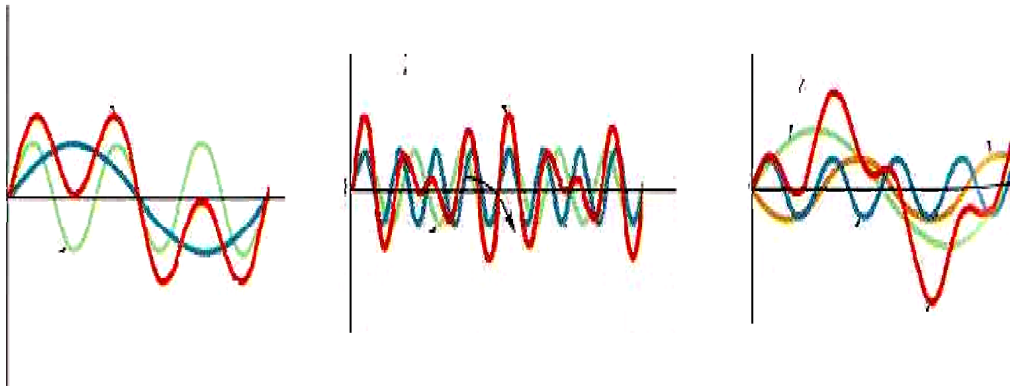
$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad y = A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] \quad y = A \cos \left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right]$$

①波速： $u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$

②两点间相位差： $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$

③波速与 x 同向，相位落后，减号；波速与 x 反向，相位超前，加号。

简谐波（余弦波或正弦波）是一种最简单最重要的波。其它复杂的波是由简谐波合成的结果。



平面波传播时，若波场中各点均按照余弦规律振动，则称为平面简谐波。

重点!

设:有一平面余弦行波, 在无吸收的均匀无限大介质中沿 x 轴(一维)传播, 波速为 u .

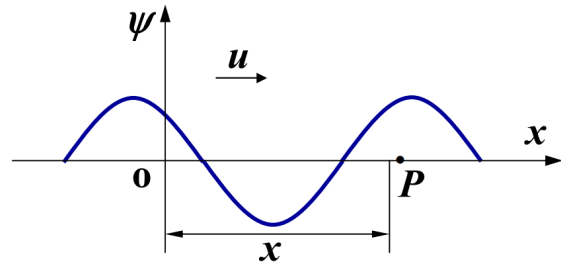
下面用数学表达式描述波线上每一质点在每一时刻的位移, 这样的函数

$\psi = \psi(x, t)$ 称为行波的波函数. ψ :位移

以横波为例说明平面简谐波的表达式
(质点在 ψ 方向振动).

已知: O 点振动表达式

$$\psi_0(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



各质点的振动状态的差别仅在于, 后开始振动的质点比先开始振动的质点, 在步调上落后一段时间。

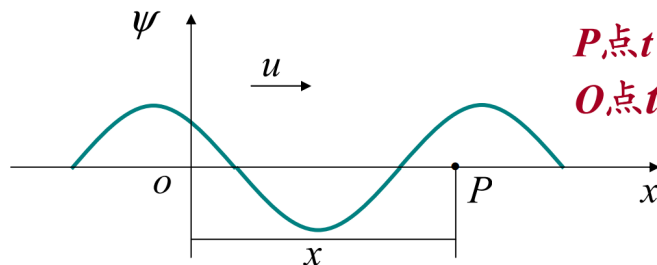
已知: $\psi_0(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

则 $\psi_P(t) = A \cos[\omega(t - t') + \varphi_0]$

$$t' = \frac{x}{u}$$

$$\psi_P(t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

—— 平面简谐波的波函数



P 点 t 时刻的位移相当于
 O 点 $t-t'$ 时刻的位移。

利用关系式 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ $\lambda = uT$

及 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (k 称为波数) 并略去角标P

平面简谐波的波动表达式可写成多种形式

$$\psi(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\psi(x, t) = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

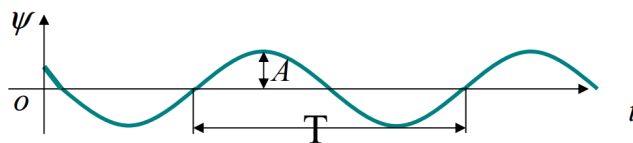
$$\psi(x, t) = A \cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\psi(x, t) = A \cos\left[(\omega t - kx) + \varphi_0\right]$$

平面简谐波的波动表达式给出波线上任一点处（距原点 x 处）在任一时刻 t 的位移。

📖 波函数的物理意义

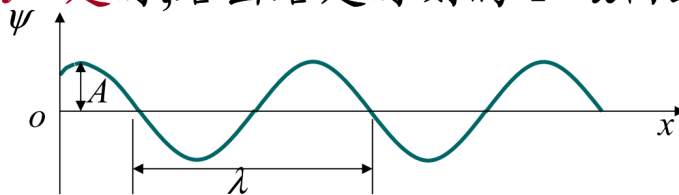
(1) 当 x 一定时，给出 x 处的振动曲线。



波具有时间
周期性 (T)

用摄像机为“舞姿优美”的某质元拍的一段特写镜头。

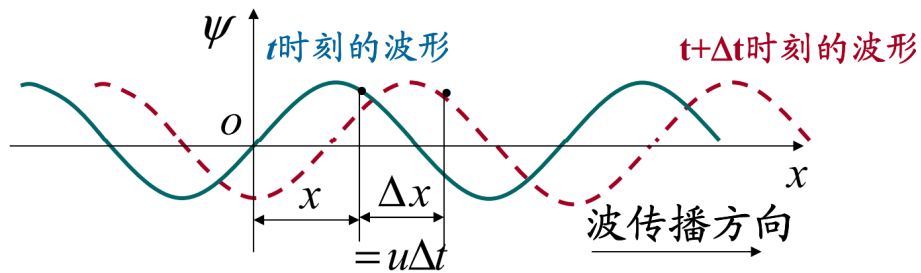
(2) 当 t 一定时，给出给定时刻的 ψ - x 曲线即波形图。



波具有空间
周期性 (λ)

t 时刻用照相机为所有质元拍的团体相。

(3) 当 t 和 x 都变化时，波函数描述了波形的传播。



平面简谐波的波动表达式给出波线上任一点处（距原点 x 处）在任一时刻 t 的位移。

波的传播在外貌上表现为波形的传播。不同时刻对应有不同的波形曲线。

(4) 质点振动的速度

$$\psi(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

则 x 处质点振动的速度为

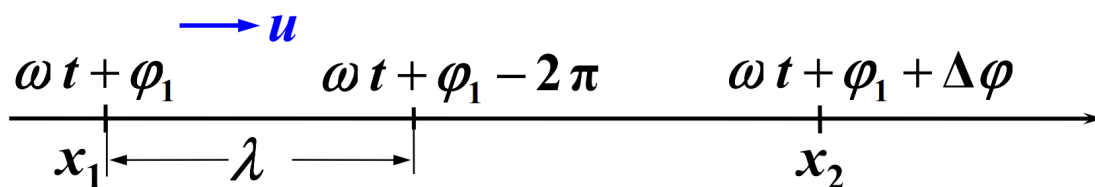
$$v = \left. \frac{d\psi}{dt} \right|_x = -A\omega \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

v 是质点的运动速度，是 x, t 的函数；

u 是波的传播速度，取决于媒质的力学性质，与 x, t 无关。

记笔记

▲ 相位关系：某时刻某质元的相位（振动状态）将在较晚时刻于“下游”某处出现。



波沿传播方向每增加 λ 的距离，相位落后 2π ：

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

2.波的速度 能流

1.波速

*15-2-1 波速

一、波的传播速度

以弦上横波为例建立波动方程

$$T_x = T \cos \theta \approx T$$

$$T_y = T \sin \theta \approx T \tan \theta = T \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

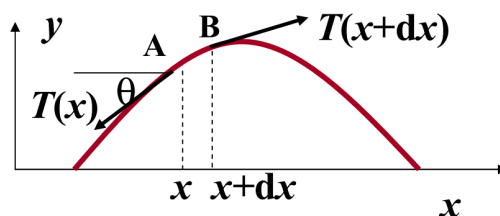
$$\text{合力为: } T_y(x+dx) - T_y(x) = T \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

$$T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$dm = \lambda dx$, λ 为弦线的线密度

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \sqrt{T/\lambda}}$$

波速仅与传播的介质有关。



合力的方向垂直于x轴，
形成横向振动

2.波的能量

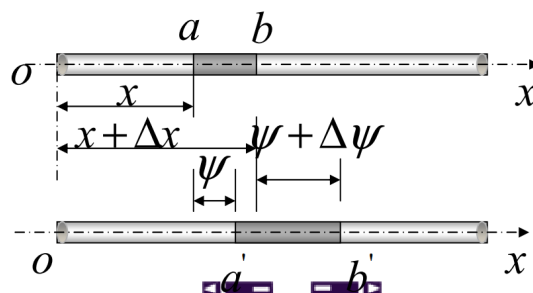
对一块弹性媒质，

因振动 → 有振动动能

因形变 → 有弹性势能

波在弹性媒质中传播时，机械波的能量是媒质中各质元机械能(动能+势能)的总和。

以平面余弦弹性纵波在棒中传播为例。研究棒中某一质元的动能和势能。



质元动能

以平面余弦弹性纵波在棒中传播为例。研究棒中质元的动能和势能。

设棒中平面简谐波的波动表式为

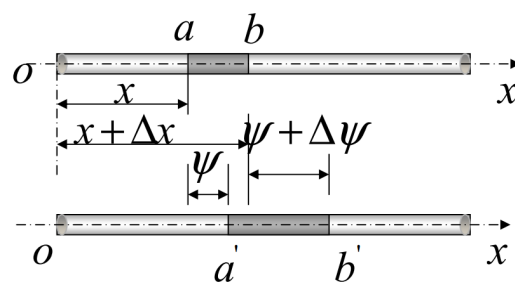
$$\psi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

质元振动速度 v 为

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -A\omega \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

质元动能 $E_K = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2 = \frac{1}{2}\rho(\Delta V)v^2$

$$E_K = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 (\Delta V) \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$



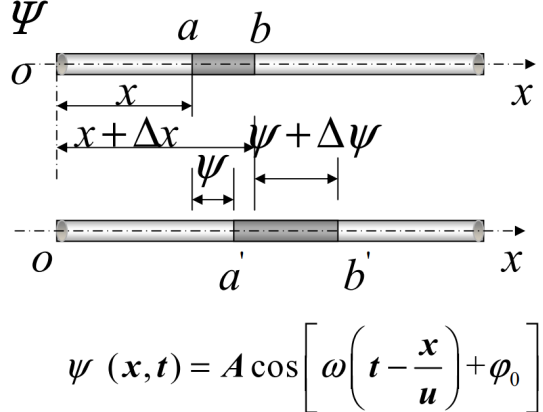
弹性势能

体积元原长 Δx ；绝对伸长量 $\Delta \Psi$

杨氏模量 Y

质元的相对形变弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} Y \left(\frac{\Delta \Psi}{\Delta x} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$



$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 = A^2 \frac{\omega^2}{u^2} \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$E_p = \frac{1}{2} Y (\Delta V) A^2 \frac{\omega^2}{u^2} \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 (\Delta V) \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

总机械能

在行波的传播过程中，质元的动能和势能的时间关系相同，同相且大小相同。

$$E_p = E_k = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 (\Delta V) \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

质元总机械能

$$E = E_k + E_p = \rho A^2 \omega^2 (\Delta V) \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

讨论:

质元的 E , E_k , E_p 都随 t 作周期性变化, E_k E_p 同时达到最大值, 又同时达到最小值。质元的机械能不守恒。

能量密度

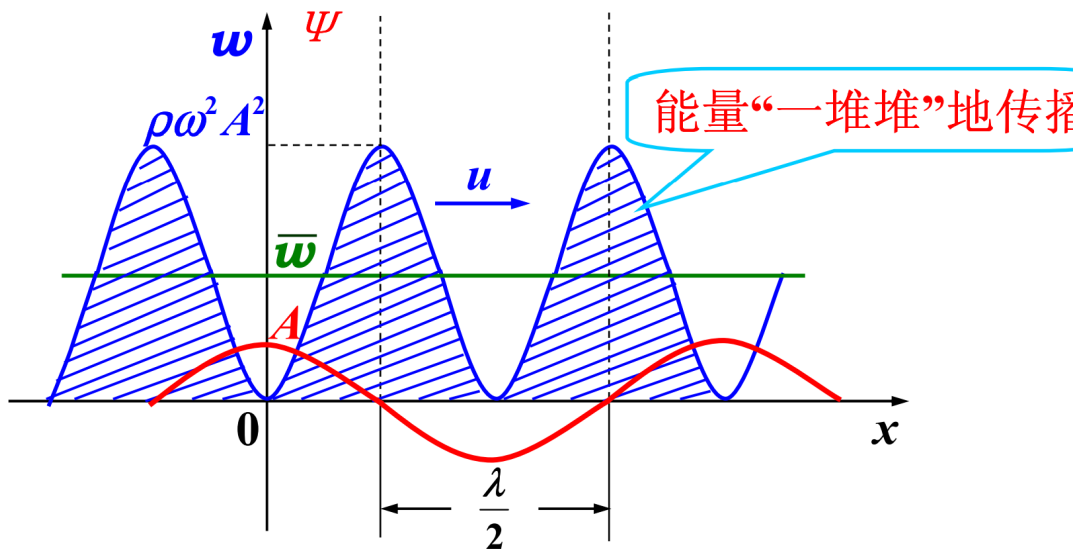
3. 波的能量密度

$$w = \frac{E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

平均能量密度 $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$ (在一个周期内的平均)

普遍结论: 机械波的能量与 A^2 , ω^2 成正比.

能量的传播



平衡位置处 ($\psi = 0$), 能量密度 w 最大,
最大位移处 ($\psi = A$), 能量密度 w 为零。

3. 波的能量流

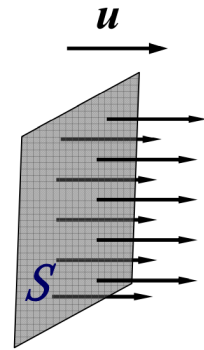
15-2-3 波的能量

能流: 把波在单位时间内通过某一面积的能量, 称为波通过该面积的能量。

平均能流密度 \bar{S} :

单位时间内通过垂直于波的传播方向的单位面积的平均能量。

$$\bar{S} = \overline{\omega u} = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$$



波的强度 I : 等于平均能流密度, $I = \bar{S}$

$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} z \omega^2 A^2 \quad (\text{单位: } \text{W/m}^2)$$

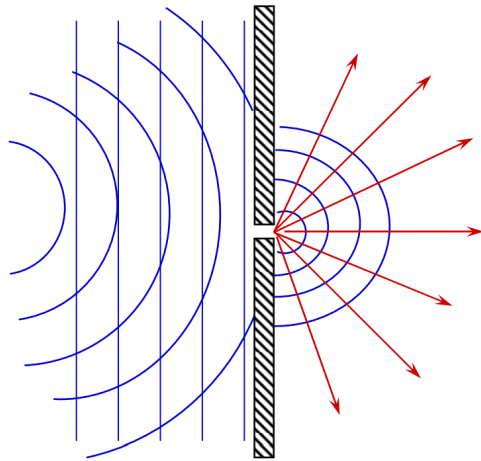
$z = \rho u$ — 媒质的“波阻”

3. 惠更斯原理 波的衍射

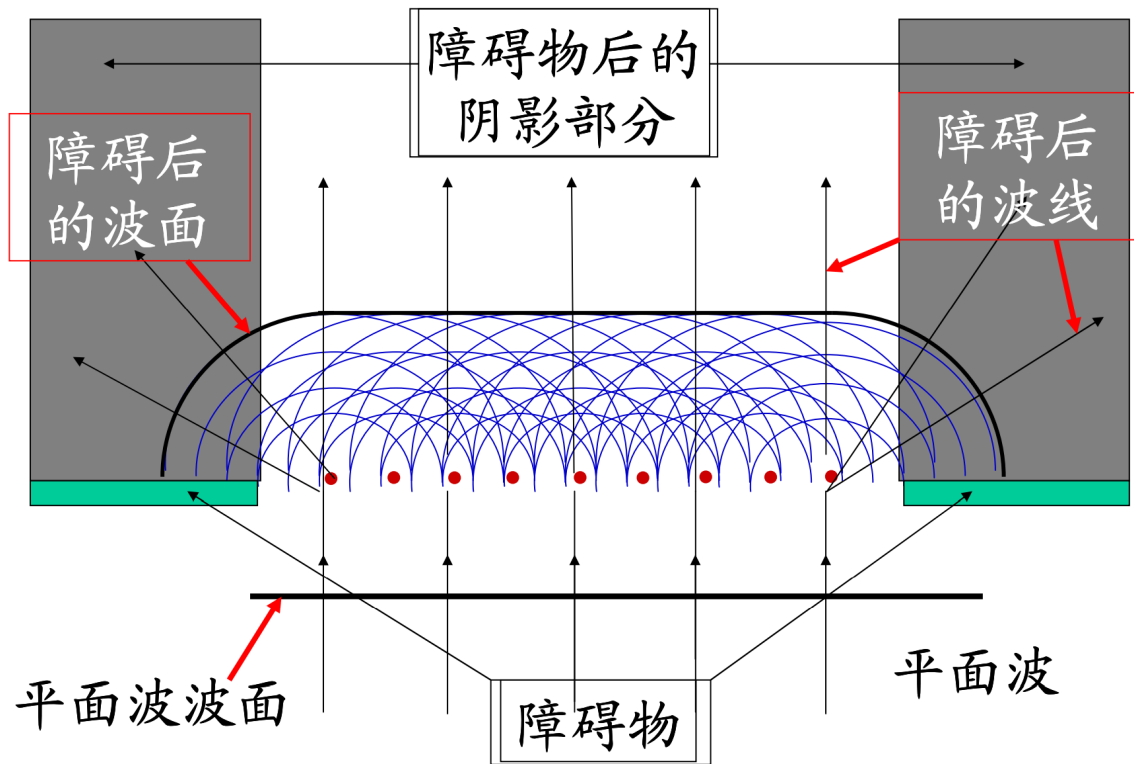
1. 惠更斯原理

穿过小孔的波与原来波的形状无关, 这说明小孔可以看成是一个新的波源。

惠更斯原理: 在波的传播过程中, 波阵面(波前)上的每一点都可看作是发射子波的波源, 在其后的任一时刻, 这些子波的包迹就成为新的波阵面。



2. 波的衍射



缺口越小，衍射越显著

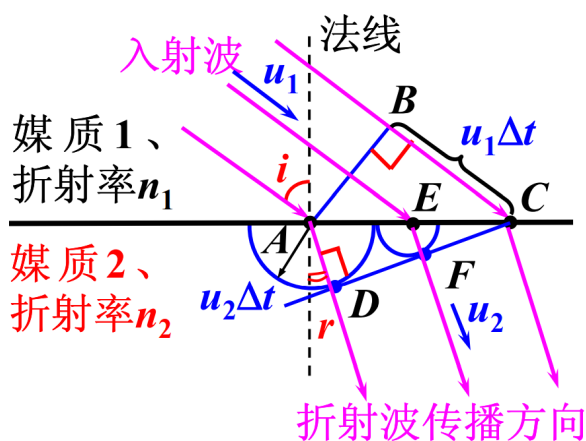
短波(频率高)的波衍射现象不明显)的波衍射现象不明显，方向性好。

3.波的反射和折射

波的反射定律: 入射角等于反射角

波的折射:

波的折射



$$\overline{BC} = u_1 \Delta t = \overline{AC} \sin i$$

$$\overline{AD} = u_2 \Delta t = \overline{AC} \sin r$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2}$$

4.波的叠加原理 干涉现象

1.波的叠加原理 干涉现象

1、几列波相遇后,仍保持它们原有的特性(频率、波长、振幅、振动方向等)不变,并按照原来的方向继续前进,即各波互不干扰

——独立传播原理

2、在相遇区域内,任一点的振动为几列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和

——波的叠加原理

波的叠加原理由波动方程的线性所决定,当波的振幅、强度过大时,对机械波,媒质形变与弹力的关系不再呈线性;对电磁波,介质不再是线性介质,叠加原理不再成立。

2.波的干涉



相干波 ;相干波源

相干条件:

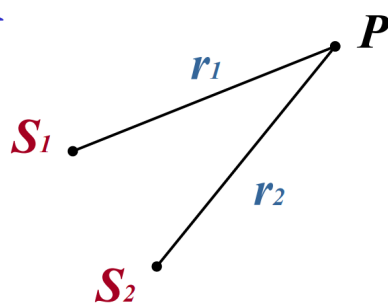
- (1) 频率相同
- (2) 振动方向相同
- (3) 有恒定的相位差

这两列波叠加后的图像稳定,不随时间变化

某些点振动始终加强.另一些点振动始终减弱

📖相干条件:

- ♣两波源具有相同的频率
- ♣具有恒定的相位差
- ♣振动方向相同



满足相干条件的波源称为相干波源。

两波源的波振幅相近或相等时干涉现象明显。

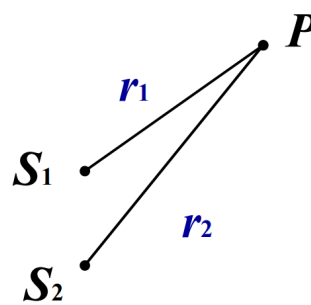
关于干涉加强、减弱条件的讨论: (重点)

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$\psi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

P点的合振动为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



式中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda})}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda})}$$

两列相干波在空间任一点所引起的
的两个振动的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

是一个恒量, 不随时间而变, 只是空间位置的函数.

空间任一点的**合振幅** A 也是一个恒量.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda})}$$

$$(1) \quad \Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi$$

($k=0,1,2,\dots$)时

$A = A_1 + A_2$ 合振动的振幅最大, 称为**相干加强**

$$(2) \quad \Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k+1)\pi$$

($k=0,1,2,\dots$)时,

$A = |A_1 - A_2|$ 合振动的振幅最小, 称为**相干减弱**

$\Delta r = r_2 - r_1$ 代表从波源 S_1 和 S_2 发出的两列相干波到达空间 P 点时所经过的路程差, 称为 **波程差**.

(3) 若 $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ 即对于两个同相位的相干波源.

此时上述条件变为: $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda}$

$$\Delta r = \pm k\lambda \quad k=0,1,2, \dots, A_{\text{最大}}.$$

$$\Delta r = \pm(k + \frac{1}{2})\lambda \quad k=0,1,2, \dots, A_{\text{最小}}.$$

两列波叠加后的强度

$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \Delta\varphi$$

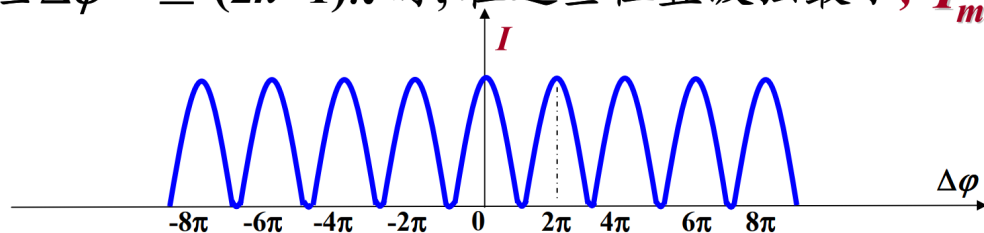
叠加后空间各点的强度重新分布.

若 $I_1 = I_2$, 则叠加后波的强度

$$I = 2I_1 [1 + \cos \Delta\varphi] = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

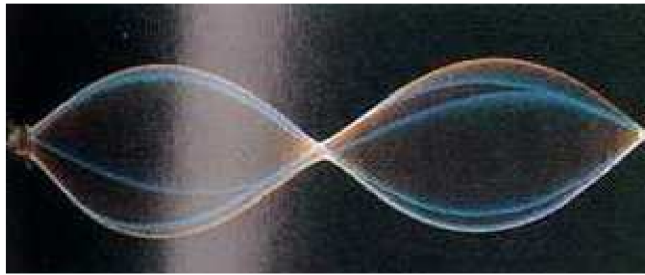
当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ 时, 在这些位置波强最大, $I_{\text{max}} = 4I_1$.

当 $\Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi$ 时, 在这些位置波强最小, $I_{\text{min}} = 0$



3.驻波

讨论两列振幅相同的相干波,在同一直线上,沿相反方向相向传播时所产生的叠加。



可以看到弦线上形成了稳定的振动状态,但各点的振幅不同,有些点始终静止不动,而另一些点则振动最强。驻波是干涉的特例。

驻波有一定的波形,此波形不移动,各点以各自确定的振幅在各自的平衡位置附近振动,没有振动状态或相位的传播。因此驻波是一种特殊的振动状态,不是波,它不具备波的特性。

二、用解析法来讨论驻波

$$\psi_1 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\psi_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{合成波 } \psi = \psi_1 + \psi_2 = \left(2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos(2\pi \nu t)$$

驻波表达式中空间与时间的变量完全分开,完全失去行波的特征,实际上是一种特殊的振动!

根据此表达式来考查合成后空间各点的情况:

(a) 考察驻波中各点的振幅 $\left| 2A \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi \right|$

合成以后各点都在做同周期的振动,但各点振幅不同,合振幅最大值发生在 $\left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 1$ 的点,因此波腹的位置

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = k\pi \quad \Rightarrow \quad x = k \frac{\lambda}{2}$$

合振幅最小值发生在 $\left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 0$ 的点, 因此波节的位置

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (2k+1)\pi/2 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

相邻两个波腹或相邻的两个波节之间的距离都是 $\lambda/2$ 。[1][2]

(b) 考察驻波中各点的相位

凡是使 $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} > 0$ 的各点相位为 $2\pi vt$ 。

凡是使 $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} < 0$ 的各点相位为 $2\pi vt + \pi$ 。

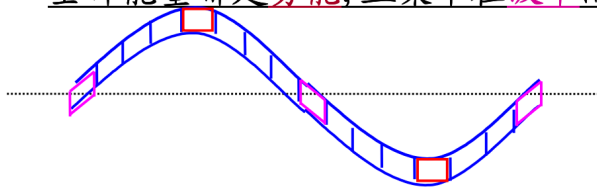
而 $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ 的各点即波节处不振动。

因此相邻的波节之间的相位是相同的, 而波节的两边相位反相。[1][2]

同一波节间的各点步调一致, 相邻波节间各点的步调正好相反。

(c) 驻波的能量

* 当介质中各质元的位移都同时达到最大值时
全部能量都是势能, 且集中在波节附近。



在波节势能最大; 波腹势能最小

* 当介质中各质元都同时经过平衡位置时
全部能量都是动能, 且集中在波腹附近。



波节动能为零, 波腹动能最大

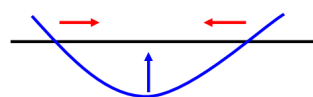
能量在波腹和波节之间 $\frac{\lambda}{4}$ 转换。

驻波进行中没有能量的定向传播。

总能流密度为零。

▲ 能量:

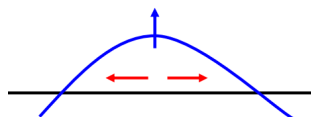
没有单向能量传输 — 驻波不传播能量。驻波能量被“封闭”在相邻波节和波腹间的 $\lambda/4$ 的范围内, 在此区间质元间有能量交换:



能量由两端向中间传, 势能 \rightarrow 动能。

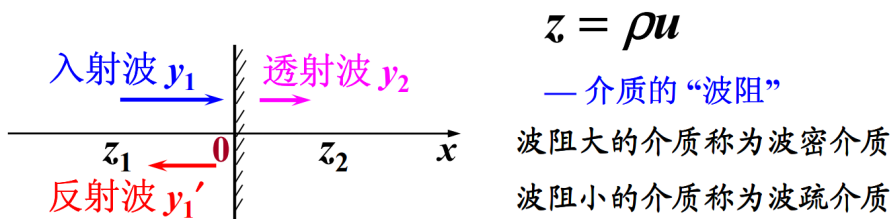


瞬时位移为0, 势能为0, 动能最大。



能量由中间向两端传, 动能 \rightarrow 势能。

三. 波在界面的反射和透射, “半波损失”



$$\text{入射波} \quad y_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_1} x + \phi_1\right)$$

$$\text{反射波} \quad y_1' = A_1' \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda_1} x + \phi_1'\right)$$

$$\text{透射波} \quad y_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_2} x + \phi_2\right)$$

相位关系

反射波: (1) 若 $z_1 > z_2$,

即波密→波疏, 在界面处反射波和入射波同相

(2) 若 $z_1 < z_2$,

即波疏→波密, 在界面处反射波有相位突变 π

— 半波损失

透射波: 不论 $z_1 > z_2$ 还是 $z_1 < z_2$,

即在界面处透射波总是与入射波同相

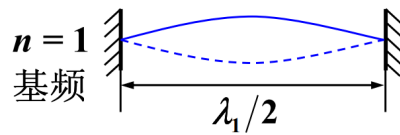
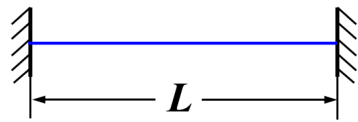
四. 简正模式

驻波可以通过界面的反射叠加产生。实际上, 任何有边界的系统内都可以存在驻波。驻波本质是振动, 是多自由度系统的集体振动。

类比弹簧振子系统可知: 驻波系统也存在特定的振动频率, 而且不止一个。一个频率对应一个稳定振动方式, 称作系统的简正模式, 相应频率称作简正频率或固有频率。

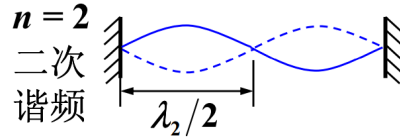
固有频率完全由驻波系统 (包含边界条件) 决定, 与外界因素无关。

两端固定的弦中的简正模式

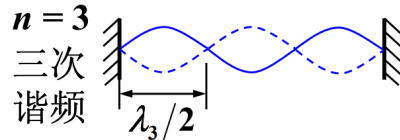


固定点为波节:

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$



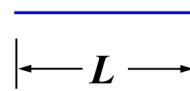
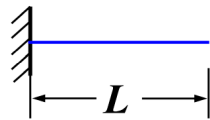
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



$$v_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} \quad (u \text{ 是弦中波速})$$

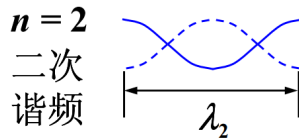
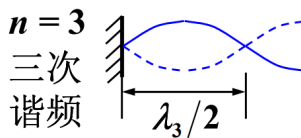
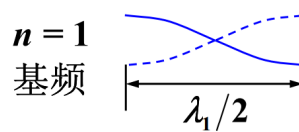
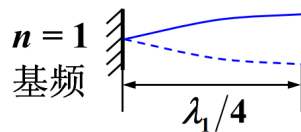
一端固定，一端自由

两端自由



$$L = n \frac{\lambda_n}{4}, \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$



5. 多普勒效应

当波源,观察者相对于介质运动时,观察者接收到的频率和波源的频率不同,这种现象称为**多普勒效应**。

假定波源、观察者的运动在同一直线上。

设波源相对于介质的运动速度为 v_s ;

设观察者相对于介质的运动速度为 v_R ;

设波在介质中传播的速度为 u ;

波源的频率 ν_s ; 观察者接收到的频率 ν_R ; 波的频率 ν 。

参考系和速度：参考系是媒质，波源速度 v_S 和接收器速度 v_R 是相对媒质的速度。

运动方向：在波源 S 和接收器 R 的连线方向。

符号规定：波源向着接收器运动 $v_S > 0$ ，背着接收器运动 $v_S < 0$ ；接收器向着波源运动 $v_R > 0$ ，背着波源运动 $v_R < 0$ ；声速取绝对值 $u > 0$ 。

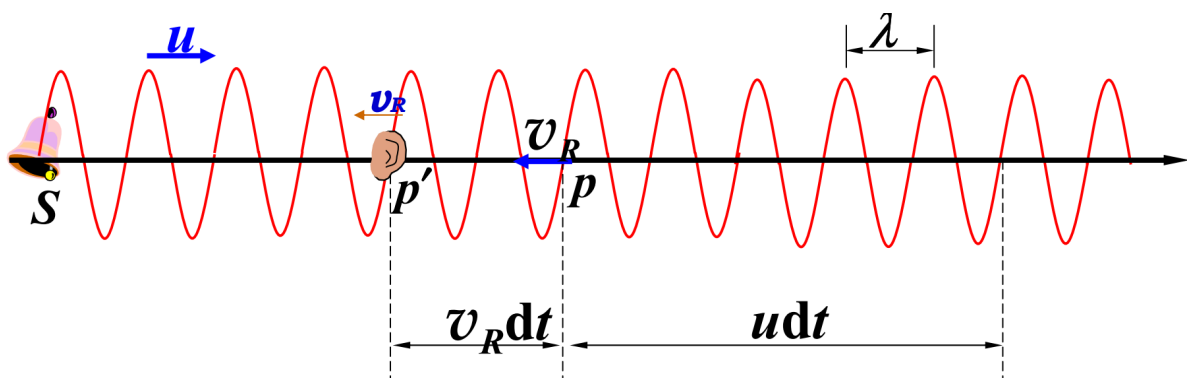
$$\underbrace{S \xrightarrow{v_S > 0}}_{\times} \quad \quad \quad \underbrace{R \xrightarrow{v_R < 0}}_{\times}$$

相对于媒质、波源和观察者都不动的情况

$$v_S = 0, \quad v_R = 0$$

$$V_R = V = \frac{u}{\lambda} = V_S$$

1. 波源不动，观察者运动

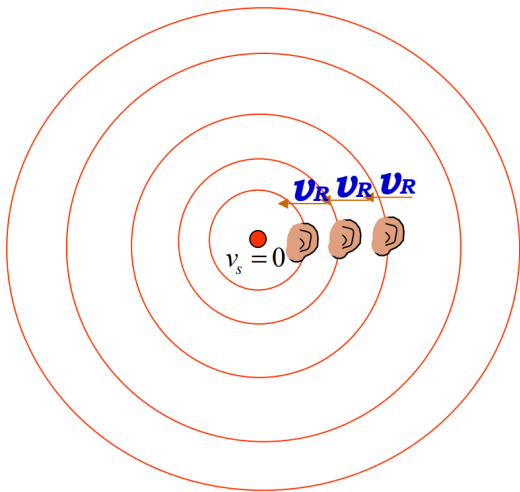


假定：观察者不动， dt 内接收到 $u dt$ 内的完整波数目。
当观察者以 v_R 迎着波源运动， $v_R dt$ 内的波也应接收到。

观察者接收到的频率（完整波数目）：

$$V_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u} V = \frac{u + v_R}{u} V_S$$





观察者向波源运动

$$V_R = \frac{u + v_R}{u} V_s$$

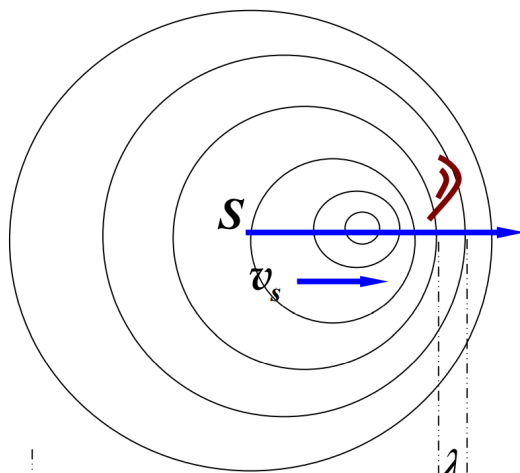
观察者背向波源运动 $V_R = \frac{u - v_R}{u} V_s$

规定观察者接近波源时为正值, 远离波源时为负值。则上两式可统一表示为

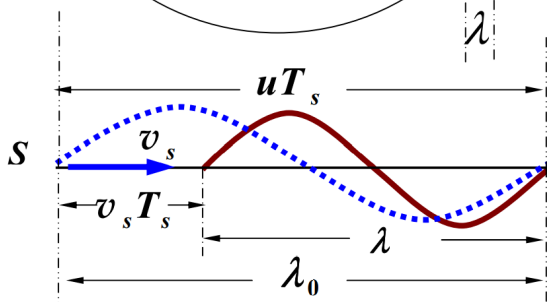
$$V_R = \frac{u + v_R}{u} V_s$$

2. 观察者不动, 波源运动

波源所发出的相邻的两个同相振动状态是在不同地点发出的, 这两个地点相隔的距离为 $v_s T_s$.



如果波源是向着观察者运动的, 这后一地点到前方最近的同相点之间的距离是现在媒质中的波长 λ



波源运动，在媒质中的波长：

$$\lambda' = uT_s - v_s T_s = \frac{u - v_s}{V_s}$$

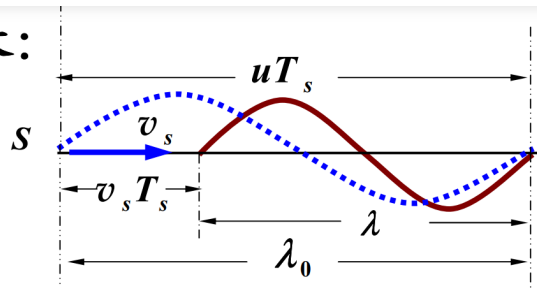
波长被“压缩”了

$$V_R = V = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{u - v_s} V_s$$

当波源远离观察者运动时，

$$\lambda' = uT_s + v_s T_s = \frac{u + v_s}{V_s}$$

$$V_R = V = \frac{u}{u + v_s} V_s$$



$$V_R = V = \frac{u}{u - v_s} V_s$$

3. 波源和观察者相对介质同时运动

$$V = \frac{u}{u - v_s} V_s$$

由于观察者相对于介质运动，观察者接收到的频率与介质中波的频率关系为

$$V_R = \frac{u + v_R}{u} V \quad \text{则} \quad V_R = \frac{u + v_R}{u - v_s} V_s$$

速度 v_R 、 v_s 是相对介质而言，并以相向为正。

当 $v_R = -v_s$ 时，无相对运动： $V_R = V_s$

假定波源和观察者在同一直线上运动，称为**纵向多普勒效应**。

若波源和观察者是沿着它们连线的垂直方向运动，则 $v_s = v_r$ ，即没有多普勒效应发生。

如果波源和观察者的运动是任意方向的，只要将速度在连线上的分量代入上式即可。

对于弹性波，不存在横向多普勒效应

6.几何光学与波动光学

大学物理II

第11章 几何光学

§11-1 几何光学基本定律

1. 光的传播规律

① 光的直线传播定律

② 反射定律和折射定律 **斯涅耳定律** $n_1 \sin i = n_2 \sin r$

③ 光的独立传播定律

2. 全反射

当 $i = i_c = \arcsin(\frac{n_2}{n_1})$ (光密 \rightarrow 光疏)

折射角 $r = 90^\circ$; 折射角超过临界角, 当 $i > i_c$ 时, 发生**全反射**

4. 费马原理

光程: 光在折射率为 n 的介质传播距离 r 所需要的时间为 $\Delta t = \frac{r}{c} = nr/c$

$L = nr$ 定义为光程

连续变化的介质 $A \rightarrow B$ 的光程 $L = \int_A^B n(x) dx$

费马原理: 光传播的实际路径是使光程或时间为极值的路径

§11.2 成像基本概念 平面成像

1. 光在平面上的反射成像

物点与像点

物像之间的等光程性

理想像: 物点对应唯一像点

平面反射成像: P' 与 P 关于镜面对称

2. 光在平面上的折射

$$n \sin i = n' \sin r$$

§11-3 球面成像

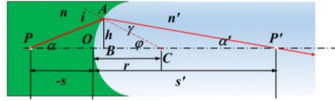
1. 球面折射成像的物像关系

单球面光学系统

折射球面半径 r , 球心 C , OC 为光轴

$$-\frac{n}{r} - \frac{n'}{r'} = \frac{n' - n}{r}$$

单球面折射成像的普遍物像公式

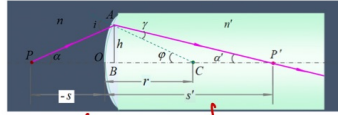


傍轴条件下, 任意入射光线PA及折射光线AP', α, α', φ 以及*i*和*i'*都很小

$$\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{h}{-s} \quad \alpha' \approx \tan \alpha' \approx \frac{h}{s'} \quad \varphi \approx \tan \varphi \approx \frac{h}{r}$$

将几何关系: $i = \alpha + \varphi, \gamma = \varphi - \alpha'$ 代入折射定律

$$n \sin i = n' \sin \gamma \rightarrow n i = n' \gamma, \text{ 整理得 } \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$



$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

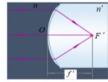
在傍轴条件下单个球面折射成像的普遍物像公式
s-物距, *s'*-像距

令 $r = \infty$, 得平面折射成像 $\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}$

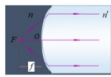
再令 $n' = -n$, 得平面反射成像 $s' = -s$

焦距 高斯物像公式

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$



将轴上物点*P*移到无穷远, 其共轭像点*F'*称为像方焦点 (focal point in the image side) 或后焦点. *F'*到*O*的距离称为像方焦距 (或后焦距), 记为*f'*. 令 $s = \infty, f' = s' = \frac{n'r}{n' - n}$



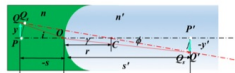
与无穷远像点对应的共轭物点*F*称为物方焦点 (focal point in the object side) 或前焦点. *F*到*O*的距离称为物方焦距 (或前焦距), 记为*f*. 令 $s' = \infty, f = s = -\frac{n'r}{n' - n}$

高斯物像公式

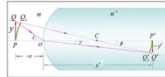
$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

2. 傍轴物点成像与横向放大率

傍轴物点成像



傍轴物点成像公式



$$\sin i = \tan i = \frac{y}{-s} \quad \sin \gamma = \tan \gamma = \frac{-y'}{s'}$$

得傍轴条件下轴外一点的成像公式

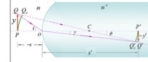
$$nys' = n'y's$$

横向放大率

$$ny's' = n'y's$$

横向放大率 β

$$\beta = \frac{y'}{y}$$



单球面折射成像的横向放大率为

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{s}{s'}$$

$|\beta| > 1$ 像放大, $|\beta| < 1$ 像缩小, 按符号规定, $\beta > 0$ 像正立, $\beta < 0$ 像倒正立

3. 球面反射成像

反射定律可以看作是折射定律在 $n_1=n_2$ 下的特例
将球面折射的公式, 令 $n'=n$, 即得

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$$

$$f' = f = \frac{r}{2} \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

像点 P' 在顶点 O 左侧时为实像, 右侧时为虚像;

若 F 在顶点 O 的左侧, 则 $f < 0$, 这相当于凹面镜的情形;

若 F 在顶点 O 的右侧, 则 $f > 0$, 这相当于凸面镜的情形。

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{n}{n'} = -\frac{s'}{s} \cdot \frac{f}{f'}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

1. 薄透镜的物理公式

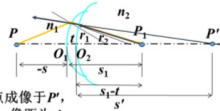
1. 薄透镜的物理公式

两步成像

透镜成像过程: 两个表面分步成像的结果

1. 设透镜折射率为 n , 透镜前后两侧的折射率分别为 n_1 和 n_2 , 物点 P 经过透镜前表面(曲率半径和顶点分别为 r_1 和 O_1)成像于 P_1 点, 物距为 s , 像距为 s_1 , 应用单球面折射物像公式

$$\frac{n}{s_1} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r_1}$$



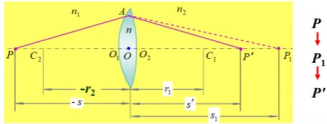
2. 第二次成像: P_1 点成像于 P' , 从 O_2 算起物距为 $s_1 - t$, 像距为 s'

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n}{s_1 - t} = \frac{n_2 - n}{r_2}$$

$$\text{薄透镜的物像公式} \quad \frac{n}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n_2 - n}{s_1 - t} = \frac{n_2 - n}{r_2}$$

薄透镜: 透镜厚度远小于球面曲率半径, 两顶点 O_1 和 O_2 重合于 O 点, 称为光心将上面两式相加, 并略去 t , 得到薄透镜成像公式

$$\frac{n_2}{s'} = \frac{n_1}{s} + \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$



若透镜两边折射率相同, 则通过光心的光线不改变方向。

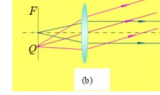
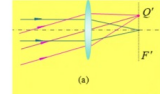
2. 薄透镜的焦距和焦点

与单球面类似, 分布令 $s = \infty$ 和 $s' = \infty$, 得
像方焦距 f' 和物方焦距 f

$$f' = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

$$f = -\frac{n_1}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

$$\frac{n_2}{s'} = \frac{n_1}{s} + \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$



在傍轴条件下, 与光轴不同夹角的平行光其像距都为 f' , 即像点都位于过焦点且垂直于光轴的焦平面; 而焦平面上一点则将成像于无穷远

高斯物像公式 放大率

用焦距表示, 得高斯物像公式

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

经两次成像, 总横向放大率为

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = \frac{n_1 s_1}{ns} \cdot \frac{ns'}{n_2 s_1} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}$$

$$\frac{n_2}{s'} = \frac{n_1}{s} + \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$

$$f' = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

$$f = -\frac{n_1}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

空气中的薄透镜

令 $n_1=n_2=1$, 得

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \beta = \frac{s'}{s}$$

$$\frac{n_2}{s'} = \frac{n_1}{s} + \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$

$$f' = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

$$f = -\frac{n_1}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

即物方和像方焦点分别位于透镜前后, 焦距大小相等. 因此, 在空气中, 薄透镜无论哪一面朝前, 其成像关系都一样. 由符号规定可知

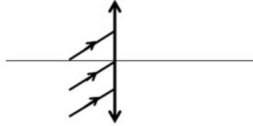
凸透镜: $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0$, $f' = -f > 0$, 两个焦点都是实的

凹透镜: $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) < 0$, $f' = -f < 0$, 两个焦点都是虚的

$$\text{光焦度} \Phi = \frac{1}{f} = -\frac{1}{f'}$$

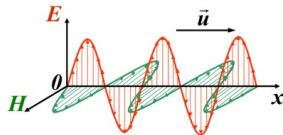
3. 薄透镜的作图求象法

薄凸透镜的焦距是 10cm，求与透镜主轴成 30°角的一束平行光入射到此透镜上，像点在何处？并画出光路图。



第17章 波动光学
§17-1 光波的叠加和干涉
1. 光是电磁波

麦克斯韦最伟大的成就是提出了光是电磁波。



电场强度 E 的振动称为光振动。 \vec{E} 称为光矢量。

从光与物质的作用来看，光波中的电场和磁场的重要性并不相同，如：

使照相底版感光的是电场而不是磁场；
对视网膜起作用的是电场而不是磁场；

一、基本性质

1. 电磁波在真空中的波速

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = c$$

国际单位制中的基本单位“米”

“米”是光在真空中 $1/299792458$ 秒的时间间隔内所经路径的长度。

在电容率 ϵ 磁导率 μ 的介质中，电磁波的波速为

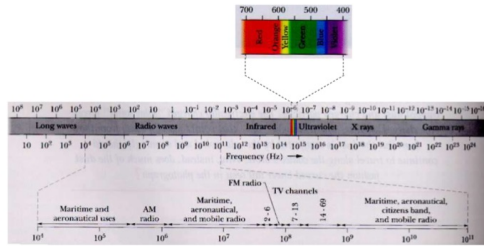
$$u = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = 1/(\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\mu_r\epsilon_r}) = c/\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

介质的折射率

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

2. 电磁波是横波。有偏振特性

二、电磁波波谱与光波



三、电磁场的物质性

1. 电磁场的能量密度: $w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

坡印廷定理——表征电磁能量守恒关系

$$-\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V (w_m + w_e) dV \right] + \int_V \sigma E^2 dV$$

2. 电磁波的能量密度 S (W/m^2) ——坡印廷矢量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

其方向表示能量流动方向，其大小表示单位时间内穿过与能量流动方向垂直的单位面积的能量。

3. 光强 I 光波平均能流密度的大小 (W/m^2) $I = \bar{S}$

四、平面简谐光波

简谐：单一频率；
平面：等相位面是平面

$$E = A \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \phi_0) \quad \text{V/m}$$

$$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

$$H = \sqrt{\epsilon/\mu} A \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \phi_0) \quad \text{A/m} \quad \text{称作波阻抗, 单位为欧姆}$$

能流密度矢量的大小

$$S = EH = \sqrt{\epsilon/\mu} E^2 = \sqrt{\epsilon/\mu} A^2 \cos^2(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \phi_0)$$

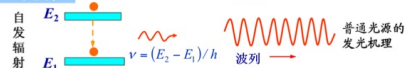
$$\text{光强 } I = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon/\mu} A^2$$

结论：比较空间两处的光强，除去介质因素外，仅考虑两处光矢量的振幅平方。

2. 光源 单色光

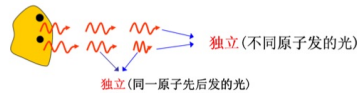
一、光源

发射光波的物体称为光源。



【间歇性】：原子或分子每次发光是间歇的，持续时间 $10^{-9} \sim 10^{-8} \text{ s}$

【独立性】：原子、分子发光彼此独立、随机



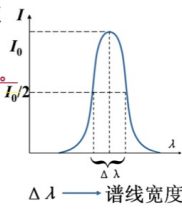
二、单色光

单色光：频率恒定的一列无限长正弦（或余弦）光波。

普通光源所发射的光都不是单色光。

原子发射的光，其波列长度是有限的，光谱线都有一定宽度，不是严格的单色光。钠光灯发出的黄色光不是单色光。氦-氖激光器发出的光也不是严格的单色光。

谱线宽度越窄，光的单色性越好。



相干光源：(1) 氪灯 Kr—86.606 nm, 单色性“较好”。

(2) 激光 He—Ne。

3. 干涉光强分布与光程差

一、光波的叠加

光的独立传播原理 光波叠加原理

$$\vec{E}_1(r_1, t) = \vec{A}_1 \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda_1})$$

$$\vec{E}_2(r_2, t) = \vec{A}_2 \cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda_2})$$

叠加后 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

假设1：两光矢量是同方向的

$$E_0^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi$$

在观测时间内平均光强是正比于振幅的平方

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \overline{(\cos \Delta\phi)_T}$$

$$\Delta\phi = |(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1})|$$

干涉项： 与两光源的频率、初相位以及空间 p 的位置有关。它决定着 p 点的光强

假设2：两个光源的发光频率相同

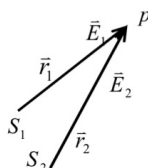
$$\Delta\phi = [(\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi(\frac{r_2 - r_1}{\lambda})]$$

当光源的初相差 $\varphi_{20} - \varphi_{10}$ 随机变化时，则

$$\overline{(\cos \Delta\phi)_T} = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2 \text{ 非相干叠加}$$

当光源的初相差 $\varphi_{20} - \varphi_{10}$ 始终恒定时，则

$$\overline{(\cos \Delta\phi)_T} \neq 0 \text{ 相干叠加}$$



普通光源：原子、分子每次发光的持续时间约为 10^{-8} 秒，在这段时间内原子或者分子发射出一列光波，停顿若干时间后（停顿时间与持续时间有相同的数量级），再行发射另一列光波。原子、分子前后发射的各列光波是独立的，相互间没有固定的位相和偏振关系，不同原子之间发出的波列也是独立的。

在观测时间内观测到的光强是时间 τ 内的平均强度

$$\bar{I} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I dt = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \int_0^{\tau} \cos \Delta\phi dt$$

如果 S_1, S_2 是相互独立的普通光源（间歇性和随机性）

$$\int_0^{\tau} \cos \Delta\phi dt = 0 \rightarrow \bar{I} = I_1 + I_2 \text{ 非相干叠加}$$

二、相干叠加

两相干光源

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$P \text{ 点: } y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} r_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda} r_2)$$

$$P \text{ 点的合振动: } y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{其中: } A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\Phi)^{1/2}$$

$$\therefore \text{光强 } I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \overline{\cos \Delta\Phi}$$

干涉项

$$\Delta\Phi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

相位差决定合成波振幅的大小

两列光波有相互平行的电振动分量

两列光波频率相等

两列光波初相位差恒定

相干条件

相干条件

两个光波发生干涉的三个必要条件通常称为相干条件。

(1) 两光波的频率相等

(2) 有相互平行的电振动分量

(3) 相位差 $\Delta\varphi$ 恒定

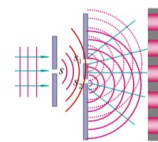
满足这三个条件的光波称为相干光波，对应的光源称为相干光源

如何从普通光源获得相干光，从而得到稳定的干涉图样呢？

在任何瞬间到达观察点的，应该是同一批原子发射出来的经过不同光程的两列光波。

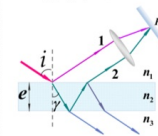
三、从普通光源获得相干光的方法

1 分波前法



杨氏双缝干涉

2 分振幅法



等倾干涉，等厚干涉

四、光波干涉加强及减弱的条件

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad \Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

干涉加强的条件 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

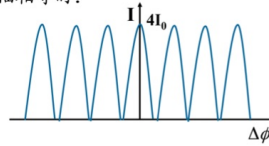
干涉减弱的条件 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$I = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

注意：整个干涉场的总光能与叠加前保持守恒，干涉现象只不过是总光能在空间重新分配而已。

当两列波的振幅相等时：

干涉光强图：



同相，明纹处： $I_{\max} = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} = 4I_0$

反相，暗纹处： $I_{\min} = I_0 + I_0 - 2\sqrt{I_0 I_0} = 0$

当两列波的振幅相等时 ($I_{\min}=0, I_{\max}=4I_0$)，干涉现象最明显。

五、光程 (重要)

真空： $v, c, \lambda, n=1$ ($n = \frac{c}{v}$)

$\frac{c = v\lambda}{v = v\lambda_n} \rightarrow n = \frac{\lambda}{\lambda_n}$ $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$

真空中 $\Delta\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda} r$

介质中

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda_n} r = \frac{2\pi n}{\lambda} r = \frac{2\pi}{\lambda} (nr)$$

称 (nr) 为光程

波在介质中相位的变化与 n, r 两者都有关

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (nr)$$

结论：光波在介质中相位的变化与 n, r 两者都有关

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (nr)$$

称 (nr) 为光程

注意： λ 为光波在真空中的波长

$\Delta\varphi$

六、光程差

S_1 的光波传至 P 点，引起的振动为

$$E_1 = E_{10} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda_1} \right)$$

S_2 的光波传至 P 点，引起的振动为

$$E_2 = E_{20} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda_2} \right)$$

两者的相位差为

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi r_1}{\lambda_1} - \left(-\frac{2\pi r_2}{\lambda_2} \right) = \frac{2\pi n_2 r_2}{\lambda_0} - \frac{2\pi n_1 r_1}{\lambda_0}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 r_2 - n_1 r_1) \quad (\text{仅当初相差为零时成立})$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 r_2 - n_1 r_1)$$

可见采用光程的概念后，相当于把光在介质中的传播都折算为光在真空中的传播

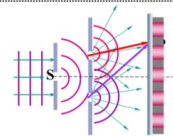
$$\text{光程差 } \delta = n_2 r_2 - n_1 r_1$$

$$\text{相位差与光程差关系 } \Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

式中 λ 为真空中的波长

§17-2 分波前干涉
1. 杨氏双缝干涉实验

一、杨氏双缝干涉实验



狭缝S作用

$d \gg \lambda, D \gg d$ ($d \sim 10^{-4}\text{m}, D \sim \text{m}$)

二、干涉明暗条纹的位置

1. 干涉条纹位置的推导：

$$\delta = n(r_2 - r_1) \approx nd \sin \theta$$

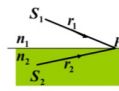
$$= nd \cdot \tan \theta = nd \frac{x}{D}$$

当 $\delta = \frac{nx d}{D} = \pm k\lambda$ P 点为明条纹，

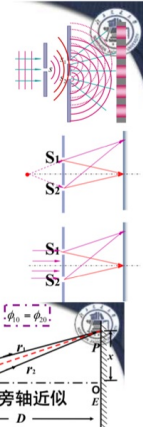
$$\text{得 } x_{\text{明}} = \pm k \frac{D\lambda}{nd} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

当 $\delta = \frac{nx d}{D} = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ P 点为暗条纹

$$\text{得 } x_{\text{暗}} = \pm (2k+1) \frac{D\lambda}{2nd} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$



不考虑半波损失



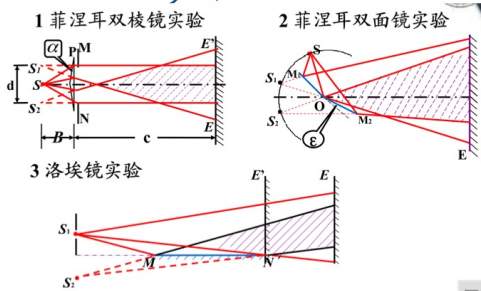
2. 结论

- (1) 当平行光垂直照射双缝时，屏幕中央($x=0$)为明条纹，向两侧分布明暗相间的条纹。旁轴近似
- (2) 条纹宽度 $\Delta x = D\lambda/(nd)$ ，单色光条纹间距(宽度)相等。
 $\therefore x_{\text{明}k} = k \frac{D\lambda}{nd}$ $\therefore \Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{nd}$
- (3) $\Delta x \propto \lambda$ ，对于复色光， $x \neq 0$ 时明条纹有色散，内侧紫，外侧红。(白光的杨氏干涉条纹)



- (4) 可利用 Δx 、 D 和 d 求得光波长 λ
- (5) 相邻明或暗纹对应的光程差之差 $= \lambda$

2. 其他波动干涉实验



3. 空间相干性, 时间相干性

一、干涉条纹的可见度

干涉场中某点P附近的条纹的可见度(对比度、衬比度)，用 V 表示。定义为：

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

I_{\max} 和 I_{\min} 分别为P点附近条纹的强度的极大值和极小值。

▲ 决定衬比度的因素：

振幅比，光源的单色性，光源的宽度

二、振幅比对干涉条纹的可见度的影响

相干光相遇处的光强 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

因此 $I_{\max} - I_{\min} = 4\sqrt{I_1 I_2}$ ， $I_{\max} + I_{\min} = 2(I_1 + I_2)$

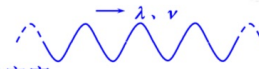
则可见度与两相干光光强的关系

$$V = \frac{2\sqrt{I_2/I_1}}{1 + I_2/I_1} \leq 1$$

三、光的非单色性对干涉条纹的可见度的影响

光的非单色性

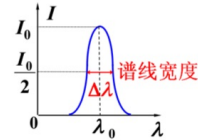
1. 理想的单色光



2. 准单色光、谱线宽度

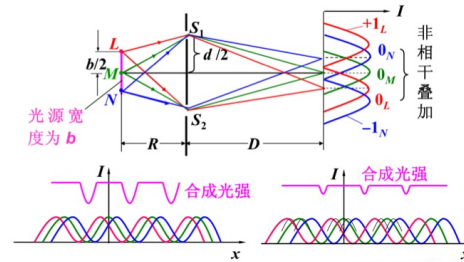
准单色光：在某个中心波长(频率)附近有一定波长(频率)范围的光。

谱线宽度：



四、光源的宽度对干涉条纹的可见度的影响

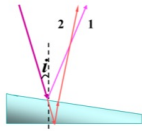
实际的光源不可能是理想的点光源，它总有一定的大小，包含众多的点光源。



§17-3 分振幅干涉

1. 薄膜干涉概述

薄膜干涉: 光波经薄膜两表面反射后相互叠加所形成的干涉现象, 称为薄膜干涉 (film interference)



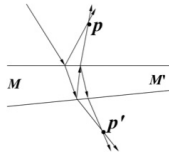
相干光束是通过把入射光波分割而形成的, 即用分振幅法获得相干光。

●普遍地讨论薄膜干涉是一个极为复杂的问题。有实际意义的是厚度均匀薄膜在无穷远处的等倾条纹和厚度不均匀薄膜表面的等厚条纹。

一、干涉场的光强公式

相干光相遇处的光强

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$



$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pm 2k\pi & \text{干涉加强} & \text{相长干涉} \\ \pm (2k+1)\pi & \text{干涉减弱} & \text{相消干涉} \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad \delta = ? \quad \dots$$

二、光程差公式 平行平面膜产生的干涉

薄膜干涉的光路

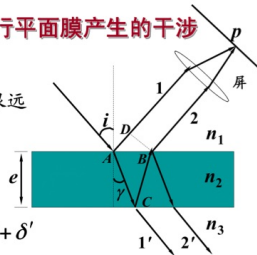
光线1与2的干涉发生在无限远处(或凸透镜焦平面)

光程差

$$\delta = n_2(AC + CB) - n_1 AD + \delta'$$

$$\delta' \text{ 为附加光程差, (取 } \lambda/2 \text{ 或零)} \quad \left. \begin{matrix} n_3 < n_2 > n_1 \\ n_3 > n_2 < n_1 \end{matrix} \right\} \delta' = \lambda/2$$

分析可得 $\delta = 2n_2 \frac{e}{\cos \gamma} - 2n_1 e \tan \gamma \sin i + \delta'$



$$\delta = 2n_2 \frac{e}{\cos \gamma} - 2n_1 e \tan \gamma \sin i + \delta'$$

由折射定律的公式, 得 $n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$

$$\delta = 2e n_2 \cos \gamma + \delta' = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'$$

薄膜上方反射光会聚时发生干涉, 则

$$= \begin{cases} k\lambda & k = 1, 2, 3, \dots \text{ 为明条纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k = 0, 1, 2, \dots \text{ 为暗条纹} \end{cases}$$

薄膜下方用透射光会聚时, 干涉条纹明暗则刚好相反. 为什么?

(能量关系)

三、干涉条纹类型

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' = f(e, i)$$

1. 等倾干涉

e 不变时, 每一个条纹(k)对应一定的入射角 i — 等倾干涉

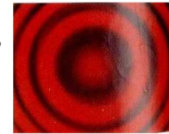
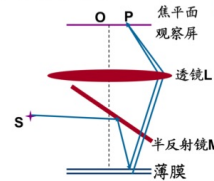
2. 等厚干涉

当入射角 i 一定(平行光入射)而薄膜厚度不均匀(e可变)时, 同一条纹所对应的将是相同的膜厚, 故称为等厚干涉条纹。

如何获得等倾干涉条纹:

- 薄膜是等厚的, 即 e=常数,
- 入射光有不同的入射角.

等倾干涉的产生:



2. 等厚干涉

一. 点光源照明时的干涉条纹分析

光束1、2的光程差:

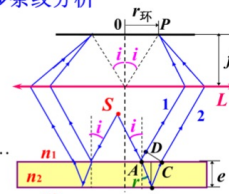
$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'$$

明纹

$$\delta(i) = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

暗纹

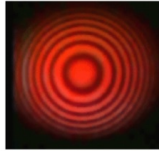
$$\delta(i) = (2k' + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k' = 0, 1, 2, \dots$$



膜厚均匀 (e 不变)

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'$$

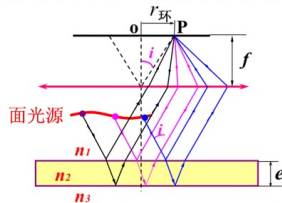
倾角*i*相同的光线对应同一条干涉条纹——等倾条纹。



条纹特点:

- ▲ 形状: 一系列同心圆环 $r_{\text{环}} = f \tan i$
- ▲ 条纹间隔分布: 内疏外密 (想想为什么?)
- ▲ 条纹级次分布: e 一定时, $k \uparrow \rightarrow \delta \uparrow \rightarrow i \downarrow \rightarrow r_k \downarrow$
- ▲ 膜厚变化时, 条纹的移动: k 一定, $e \uparrow \rightarrow i \uparrow \rightarrow r_k \uparrow$
- ▲ 波长对条纹的影响: k, e 一定, $\lambda \uparrow \rightarrow i \downarrow \rightarrow r_k \downarrow$

二. 面光源照明时, 干涉条纹的分析



只要*i*相同, 都将汇聚在同一个干涉环上(非相干叠加), 因而明暗对比更鲜明。

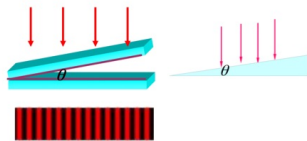
对于观察等倾条纹, 没有光源宽度和条纹衬比度的矛盾!

3. 劈尖干涉

一. 劈尖

两块光学平板玻璃放在一起, 使两板之间形成一个非常小的角度, 其间可充空气或流体, 此装置称为劈尖。

如为空气, 叫空气劈尖(air wedge)。

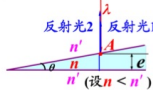


二. 劈尖产生的等厚干涉

实际应用中大多是平行光垂直入射到劈尖上。

1. 劈尖干涉加强与减弱的条件

单色平行光垂直入射



当劈尖夹角很小时

反射1、2的光程差

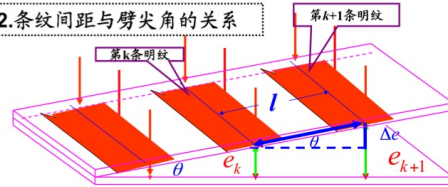
$$\delta \approx 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

明纹: $\delta(e) = 2k \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, 3 \dots$

暗纹: $\delta(e) = (2k'+1) \frac{\lambda}{2}, k'=0, 1, 2, 3 \dots$

同一厚度*e*对应同一级条纹——等厚条纹

2. 条纹间距与劈尖角的关系



相邻明纹处所对应的劈尖的厚度差:

$$\left. \begin{aligned} 2ne_k + \frac{\lambda}{2} &= k\lambda \\ 2ne_{k+1} + \frac{\lambda}{2} &= (k+1)\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n}$$

$$\text{条纹间距 } l = \frac{\lambda}{2n \sin \theta} \approx \frac{\lambda}{2n\theta}$$

结论:

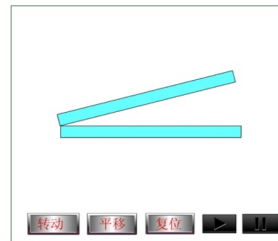
- 当平行光垂直照射空气劈尖时, 干涉条纹为平行于劈尖棱的明暗相间的等距直条纹;
- 在劈尖棱处为第零级暗条纹。
- 条纹间距为 $l = \lambda/2n\theta$, θ 越小, 条纹越疏。
- 相邻明纹或(暗纹)所对应的膜厚之差为 $\lambda/2n$ 。

3. 干涉条纹的动态变化

- 1) 条纹的间距取决于劈尖的夹角

$$l = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}$$

- 2) 每一条纹对应劈尖内的一个厚度, 当此厚度位置改变时, 对应的条纹随之移动。



$$k \Rightarrow e_k$$

结论:

劈尖均匀增厚时, 条纹间距不变, 条纹向棱边移动

劈尖均匀减薄时, 条纹间距不变, 条纹远离棱边移动

劈尖夹角增大时, 条纹间距变小, 条纹向棱边移动

劈尖夹角减小时, 条纹间距变大, 条纹远离棱边移动

三. 牛顿环

三、牛顿环

牛顿环装置如图:

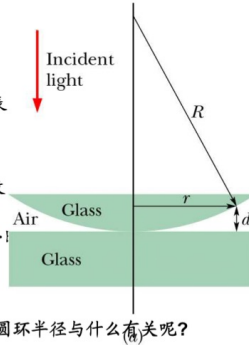
干涉发生在空气膜上下表面的反射,干涉条件仍为

$$\delta = 2e + \delta'$$

$$\delta = \begin{cases} 2k \frac{\lambda}{2} & k = 1, 2, 3, \dots \text{明纹} \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2} & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

牛顿环干涉条纹图样

牛顿环图样中的明暗圆环半径与什么有关呢?



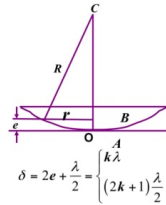
明暗干涉圆环半径推导:

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2eR - e^2$$

$\because e \ll R$ 上式右端 e^2 可忽略,

$$\text{则 } e = \frac{r^2}{2R}$$

结合明暗条件,可得环纹半径



$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$r_{\text{明}} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$r_{\text{暗}} = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

间距不相等!

常利用牛顿环测量凸面的曲率半径.

7.量子物理学基础

1.光的量子性

1.黑体辐射

1. 热辐射 (heat radiation)

物体受热就会发光,
温度不同时, 辐射的波长不同

例如: 加热铁块, 温度↑
看不出发光→暗红→橙色→黄白色

这种与温度有关的电磁辐射, 称为**热辐射**。

并不是所有发光现象都是热辐射,

激光、日光灯发光就不是热辐射。

一、热辐射现象

单色辐出度 $M(\lambda, T) = \frac{dE}{d\lambda} \quad \text{W/m}^3$

在单位时间内, 从物体表面单位面积上所发射的波长在 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 范围内的辐射能量与波长间隔的比值, 称为单色辐出度。

M 取决于 T , λ , 物质种类和表面情况等。

总辐出度 $E(T) = \int_0^{\infty} M(\lambda, T) d\lambda \quad \text{W/m}^2$

单位时间内从物体表面单位面积上所发射的各种波长的总辐射能, 称为物体的辐出度。

任一物体向周围发射辐射能的同时, 也吸收周围物体发射的辐射能。

单色吸收比 $a(\lambda, T) = \frac{\text{吸收能量}}{\text{入射能量}}$

单色反射比 $\gamma(\lambda, T) = \frac{\text{反射能量}}{\text{入射能量}}$

单色透射比 $t(\lambda, T) = \frac{\text{透过能量}}{\text{入射总能量}} \quad \alpha(\lambda, T) + \gamma(\lambda, T) + t(\lambda, T) = 1$

对于不透明物体: $a(\lambda, T) + \gamma(\lambda, T) = 1$

绝对黑体: $\alpha=1 \quad \gamma=0$
能完全吸收照射到它上面的各种波长的光的物体。

黑体是理想模型

二、基尔霍夫辐射定律

在同样温度下, 各种不同物体对相同波长的单色辐出度与单色吸收比的比值都相等, 都等于该温度下黑体对同一波长的单色辐出度。

$$\frac{M_1(\lambda, T)}{a_1(\lambda, T)} = \frac{M_2(\lambda, T)}{a_2(\lambda, T)} = \dots = M_0(\lambda, T)$$

- 这表明: 1) 黑体单色辐出度最大
2) 好的辐射体也是好的吸收体

黑体的单色辐出度只与温度和波长有关而和材料及表面状态无关。利用黑体可撇开材料的具体性质来普遍地研究热辐射本身的规律。

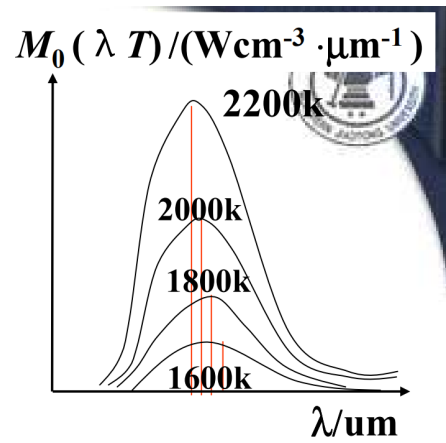
(1) 斯特藩-玻尔兹曼定律:

总辐出度 $E_0(T) = \int_0^{\infty} M_0(\lambda, T) d\lambda$

实验曲线下的面积 $E_0(T) = \sigma T^4$

斯特藩常量

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$



1879年, 斯特藩

1884年, 玻尔兹曼

1893年, 维恩

(2) 维恩位移定律:

黑体单色辐出度 M_0
极大值对应的波长
 λ_m 与温度的关系

$$T\lambda_m = b$$

维恩常量 $b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

四 普朗克量子假设

$$E_0(T) = \sigma T^4$$

实验公式

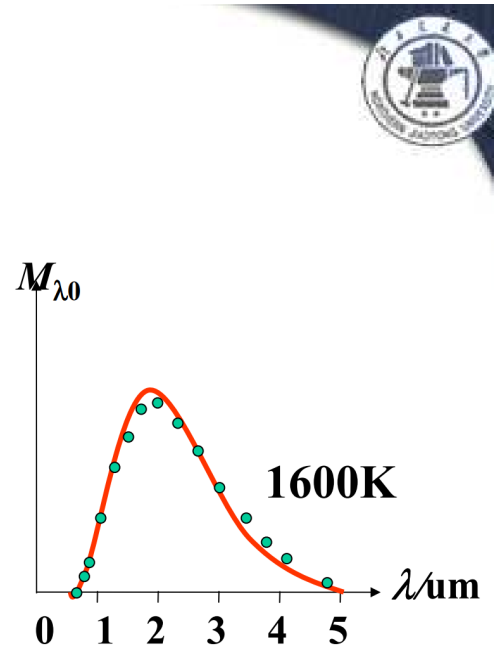
$$T\lambda_m = b$$

黑体辐射的实验结果

要从理论上:

给出合理的解释?

给出符合实验规律的函数关系?



普朗克的能量量子假说和黑体辐射公式



1900.10.19 普朗克在德国物理学学会会议上提出一个黑体辐射公式:

$$M_{\nu}(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$h = 6.55 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

实验物理学家鲁本斯 (Rubens) 把它同最新的实验结果比较,发现:

在全波段与实验结果惊人符合。



FIGURE 41-12 Max Planck.

M. Planck 德国人
1858 - 1947

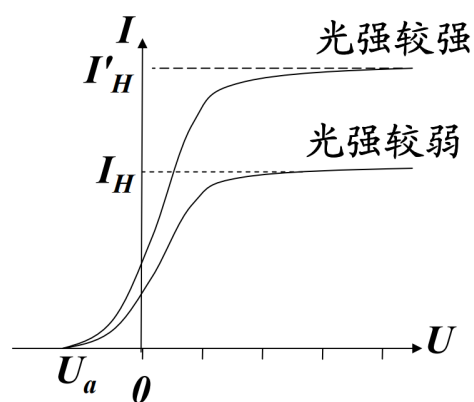
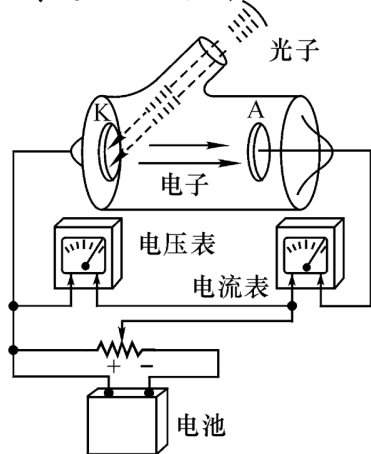
2. 光电效应

一、光电效应

光电效应: 光照射时某些金属表面能释放出电子的效应。这时产生的电子称为**光电子**。

二、光电效应的实验规律

实验装置及结果——不同光强下**光电流**与电压的关系



结果:(1)饱和电流. 阴极K在单位时间内发射的光电子数与照射光强I成正比.

(2)存在截止电压.

(3)存在红限频率.

(4)弛豫时间($<10^{-9}\text{s}$).



四、爱因斯坦的光子理论（1905）



爱因斯坦光量子假设(1905)

- 光是大量光子组成的.光子具有能量和动量.

$$E = h\nu \quad p = h/\lambda$$

- 光子具有“整体性”:

光的发射、传播、吸收都是量子化的。

对光电效应的解释:

一个光子将全部能量交给一个电子，电子克服金属对它的束缚，从金属中逸出。

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A \quad A: \text{逸出功}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A \quad \text{爱因斯坦方程}$$

$h\nu > A$ 时才能产生光电效应。

- 当 $\nu < A/h$ 时，不发生光电效应。

$$\text{红限频率} \quad \nu_0 = \frac{A}{h}$$

- $I \uparrow \rightarrow$ 光子数 $N \uparrow \rightarrow$ 打出光电子多 $\rightarrow i_m \uparrow$
- 光子打出光电子是瞬时发生的。

光(电磁辐射)的波粒二象性



1. 能量 $E = h \nu$

2. 质量 光子有质量 $m = h \nu / c^2$

$$E = mc^2$$

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$m_0 = m \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$m_0 = 0$ 光子静止质量为零

3. 动量

$$P = mc = h \nu / c = h / \lambda$$

$$P = E / c = h \nu / c = h / \lambda$$

或从: $E^2 = p^2 c^2 + m_0 c^4$ $m_0 = 0$

质量、动量描述光的粒子性

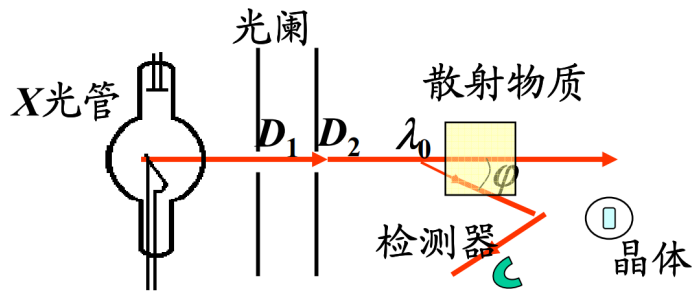
频率、波长描述波动性

$$\nu, \lambda \Leftrightarrow m, p$$

3. 康普顿效应

一、康普顿效应

A.H. Compton



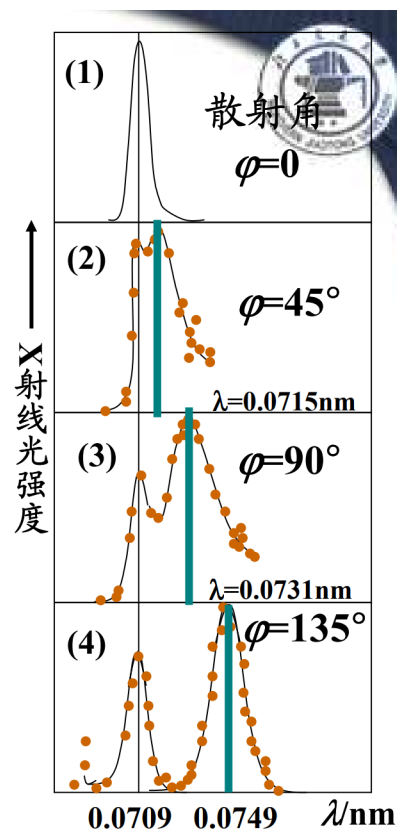
1923年, 康普顿研究了X射线散射实验, 对光子假说给予进一步的验证.

实验结果表明:

(1) 散射光中除有与入射线波长相同的, 还有比入射线波长大的波长 λ , 随散射角而异.

(2) 当散射角确定时, 波长的增加量与散射物质的性质无关.

(3) 康普顿散射的强度与散射物质有关。原子量小的散射物质, 康普顿效应越显著, 即 λ 的光越强。反之相反。



实验表明: 新散射波长 $\lambda >$ 入射波长 λ_0 , 波长的偏移 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 只与散射角 φ 有关, 和散射物质无关。实验规律是:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos \varphi) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\lambda_c = 2.41 \times 10^{-3} \text{ nm} \quad (\text{实验值})$$

λ_c 称为电子的康普顿波长

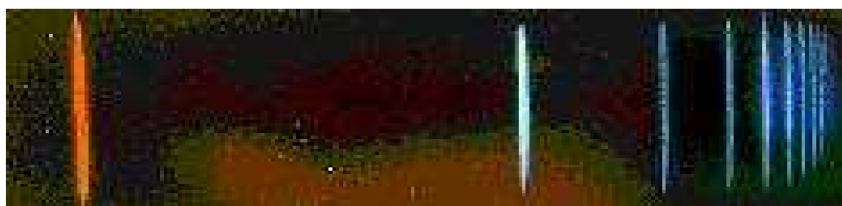
只有当入射波长 λ_0 与 λ_c 可比拟时, 康普顿效应才显著, 因此要用X射线才能观察到。

4. 波尔氢原子理论

一、氢原子光谱的规律性

在真空管中充入少量 H₂，通过高压放电，氢气可以产生可见光、紫外光和红外光。

氢原子的可见光光谱：



6562.8Å
红

4861.3Å
蓝

4340.5Å
紫

1853年瑞典人埃格斯特朗 (A.J.Angstrom) 测得

氢可见光光谱的红线，Å 即由此得来。

到1885年，观测到的氢原子光谱线已有14条

1885年

巴耳末公式：波长 $\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4}$

$$\text{波数 } \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

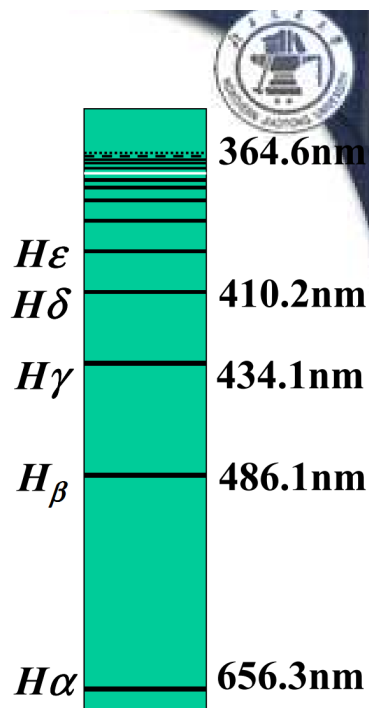
1889年

里德伯公式：波数

$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$k = 1, 2, 3 \dots$

$$n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$$



不同的 k 对应为莱曼系、帕邢系、布喇系、...

二、玻尔的氢原子理论



Niels Bohr

1913年玻尔从好友那里得知氢原子光谱的经验公式时，他立即获得了他理论“七巧板中的最后一块”。

正如他后来常说的：

“我一看到巴耳末公式，整个问题对我来说就全部清楚了。”

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \quad \text{右端应为能量差}$$

玻尔理论的基本假设：

(1) **定态假设：**原子处于一系列不连续**稳定态**。
对应各定态的能量 E_1, E_2, E_3, \dots

(2) **跃迁假设：** $\nu = \frac{|E_n - E_k|}{h}$ ($E_1 < E_2 < E_3, \dots$)

(3) **轨道角动量量子化假设：**定态下电子的轨道角动量是**量子化**的。

$$L = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$L = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

三、氢原子轨道半径和能量的计算

由库仑定律、牛顿定律和玻尔的量子假设

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

根据角动量量子化条件 $L = mvr = n \frac{h}{2\pi}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

根据以上二式解得 $r_n = n^2 \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \right)$ $n = 1, 2, 3, \dots$

当 $n=1$ 时 $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$

为氢原子的最小半径，称为玻尔半径。

2. 物质波

1. 德布罗意假设

一、德布罗意假设

从自然界的对称性出发,德布罗意认为:一个能量为 E ,动量为 p 的实物粒子同时具有波动性,其波长和频率满足:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \nu = \frac{E}{h}$$

德布罗意关系式。

经爱因斯坦的推荐,物质波理论受到了关注。

答辩会上,佩林问:“这种波怎样用实验来证实呢?”

德布罗意:“用电子在晶体上的衍射实验可以做到。”



计算德布罗意波长是重点:



$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{ch}{\sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k}} \quad v \sim c$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}} \quad v \ll c$$

估算电子波长 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}$ (电子 $v \ll c$)

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

设:加速电压为 U
(单位为伏特)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ (nm)}$$

若: $U=100V$ 时, $\lambda=0.1225\text{nm}$

- 波长与X射线波段相近应该能用晶体衍射实验验证

2.波函数

一、波函数 (wave function)

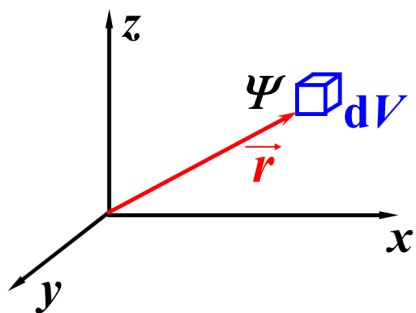
量子力学假定: 微观粒子的状态用波函数表示。

波函数: 一维 $\Psi(x, t)$, 三维 $\Psi(\vec{r}, t)$

玻恩对 Ψ 的概率解释(1926)：波函数 Ψ 是描述粒子在空间概率分布的“**概率振幅**”。其模方

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi(\vec{r}, t)^* \Psi(\vec{r}, t)$$

代表 t 时刻，在坐标 \vec{r} 附近单位体积中粒子出现的概率，称为“**概率密度**”。



在 t 时刻，在 \vec{r} 附近 dV 内粒子出现的概率为：

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

在空间 Ω 粒子出现的概率为：
$$\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

三 概率解释对波函数提出的要求

1 波函数的有限性：

在空间任何有限体积元中找到粒子的概率必须为有限值。

2 波函数的单值性：

要求波函数单值，从而保证概率密度在任意时刻都确定唯一。

3 波函数的连续性：

势场性质和边界条件要求波函数及其一阶导数是连续的

4 波函数的归一性：

在空间各点的概率总和必须为1.

$$\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \quad (\Omega - \text{全空间})$$

$\Psi(\vec{r}, t)$ 为归一化波函数

四 态叠加原理

物质波的波函数 Ψ -态函数

设：波函数 $\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \dots$ 是体系的可能状态

它们的线性叠加

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + c_3 \Psi_3 \dots$$

也是系统可能的状态。

态叠加原理是量子力学的一条基本原理。

3. 海森伯的不确定关系

严格的理论给出不确定关系：

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar/2, & \text{一般写为:} \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar/2, & \Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar/2 \end{aligned}$$

不确定关系使微观粒子运动“轨道”的概念失去意义。

不确定度关系的物理意义：

当粒子位置的不确定度 Δx 小时，动量的不确定度 Δp_x 就大，反之亦然。即 微观粒子的坐标与该方向的动量不能同时确定。

不确定关系是微观粒子固有属性——波粒二象性决定的，与仪器精度和测量方法的缺陷无关。

4. 薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right] \Psi$$

●是量子力学的基本方程，描述非相对论性粒子波函数随时间演化规律。

●是线性齐次微分方程，解满足态叠加原理

若 $\psi_1(\vec{r}, t)$ 和 $\psi_2(\vec{r}, t)$ 是薛定谔方程的解，
则 $c_1\psi_1(\vec{r}, t) + c_2\psi_2(\vec{r}, t)$ 也是薛定谔方程的解。

●方程中含有虚数 i

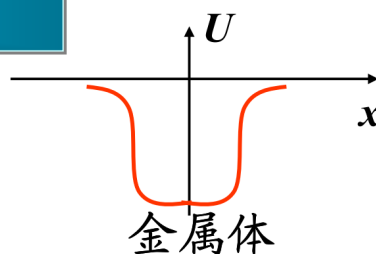
它的解 Ψ 是复函数，复数不能直接测量。
而 Ψ 的模方代表概率密度，可测量。

3.一维定态问题

1.一维无限深势阱

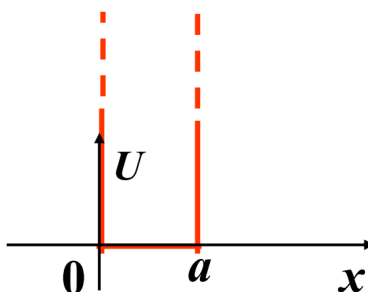
18-3-1 一维无限深势阱

当微观粒子被保守力限制在一定范围内运动时. 例如



一维无限深势阱的势能分布
(势函数)为:

$$U = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \leq 0, x \geq a \end{cases}$$



📖 一维无限深势阱结论总结:

➤ 能级 $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

能量是量子化的, $n=1, 2, 3, \dots$ (量子数)

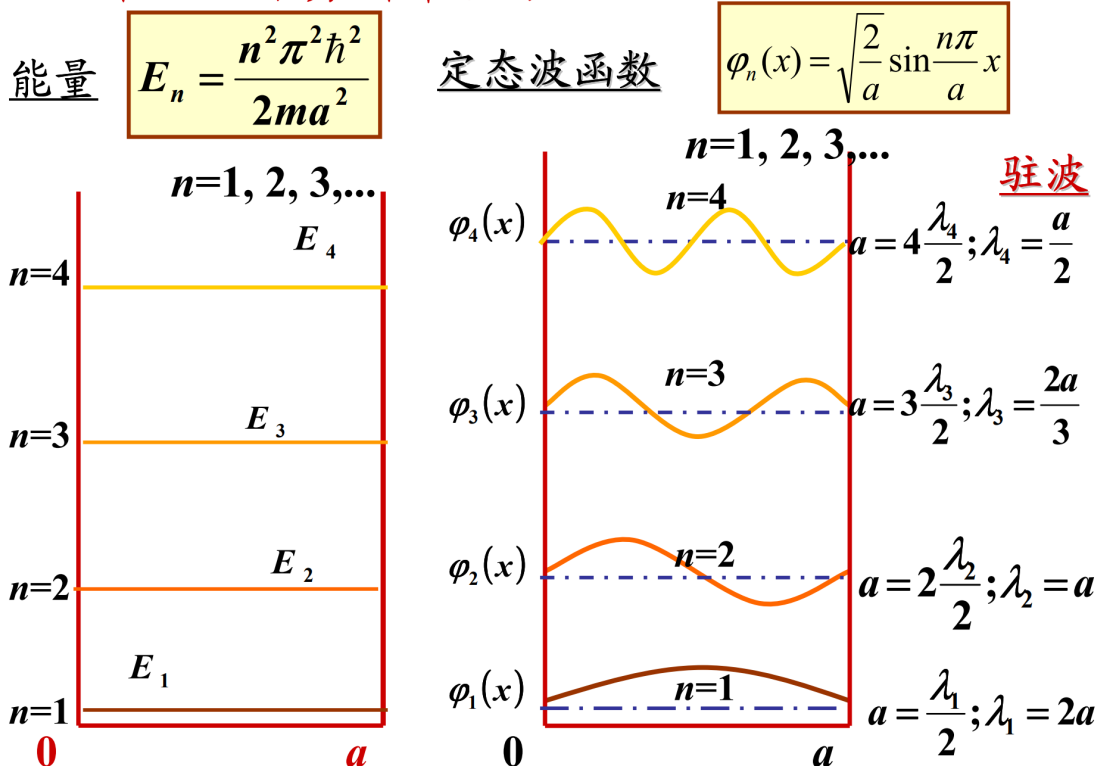
➤ 存在最低能量 (零点能) $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} > 0$

这是不确定关系要求的, 是量子客体具有波粒二象性这种固有属性所决定的。

➤ $\Delta E_n = (2n+1) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ $\left. \begin{matrix} a \uparrow \\ m \uparrow \end{matrix} \right\} \rightarrow \Delta E \downarrow$

a 或 m 很大 (宏观), $\Delta E \rightarrow 0$ (E 连续)

一维无限深势阱中粒子



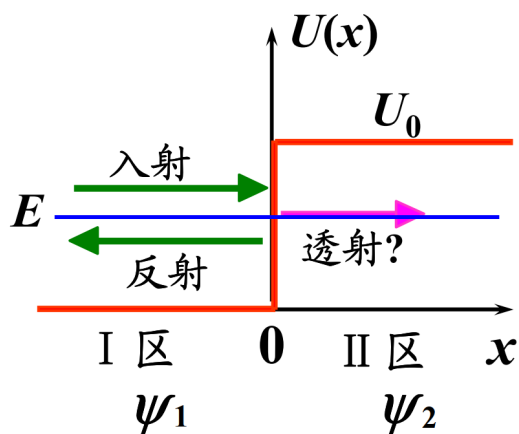
2. 势垒与隧道效应

一 粒子进入势垒

1. 势函数

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ U_0 & (x > 0) \end{cases}$$

入射能量 $0 < E < U_0$



2. 定态薛定谔方程

$$\text{I 区: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = E\psi_1(x), \quad x \leq 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad k > 0$$

$$\text{有 } \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + k^2\psi_1(x) = 0, \quad x \leq 0$$

$$\text{II 区: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + U_0\psi_2(x) = E\psi_2(x), \quad x > 0$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi_2(x) = 0 \quad x > 0$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) = -\beta^2 \quad (\beta^2 > 0)$$

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \quad \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

$$\text{有 } \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - \beta^2\psi_2(x) = 0, \quad x > 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + k^2\psi_1(x) = 0, \quad x \leq 0 \quad \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - \beta^2\psi_2(x) = 0, \quad x > 0$$

3. 通解

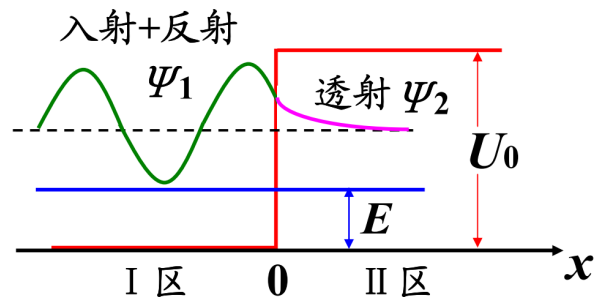
$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \psi_2(x) = Ce^{-\beta x} + De^{\beta x}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\psi_2(x)$ 应有限, 得 $D = 0$, 于是:

$$\psi_1(x) = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{入射波}} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\text{反射波}}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-\beta x}$$

$$= Ce^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}x}$$



4. 概率密度 ($x > 0$ 区)

$$|\psi_2(x)|^2 \propto e^{-2\beta x} \quad \psi_2(x) = Ce^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}x}$$

$$|\psi_2(x)|^2 \propto e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}x}$$

可见 $x > 0$ 区 ($E < U_0$) 粒子出现的概率 $\neq 0$

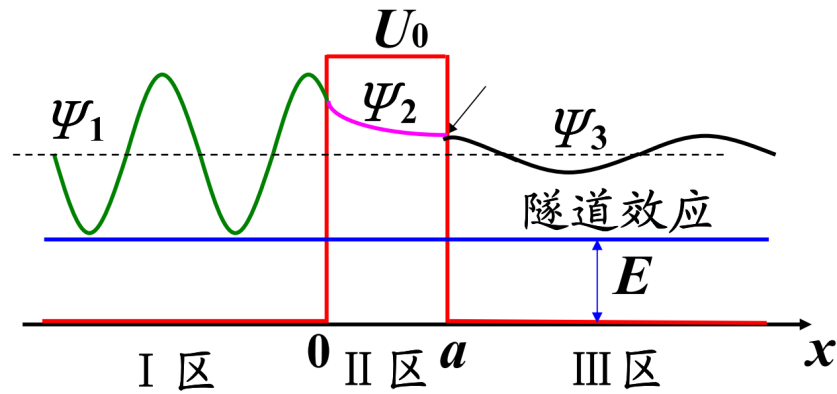
$$U_0 \uparrow, x \uparrow \Rightarrow \text{概率} \downarrow$$

经典: 电子不能进入 $E < U$ 的区域

量子: 电子可透入势垒.

电子可逸出金属表面, 在金属表面形成一层电子气.

二 有限宽势垒和隧道效应



波穿过后, 将以平面波的形式继续前进(ψ_3),

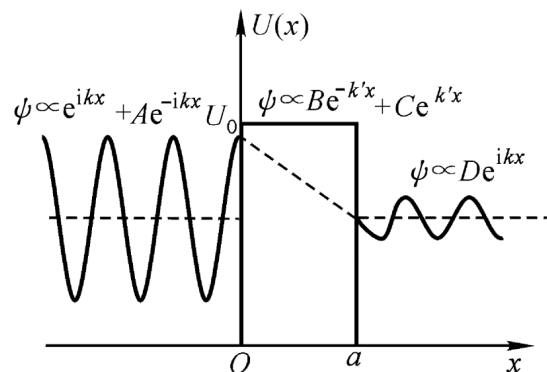
称为势垒穿透或隧道效应。

1. 穿透系数:

$$T \propto e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}$$

$$a \uparrow \rightarrow T \downarrow$$

$$(U_0 - E) \uparrow \rightarrow T \downarrow$$



当 $U_0 - E = 5eV$, 势垒宽度 a 约 50nm 以上时,
穿透系数会小六个数量级以上。

隧道效应在实际上已经没有意义了。

量子概念过渡到经典了。

